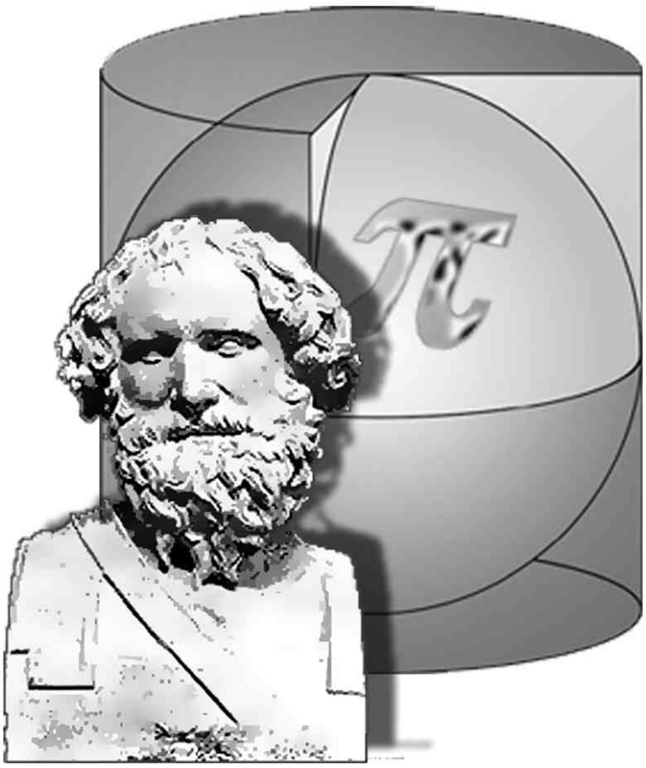
Ivano Bonesana

LE ORIGINI DEL CALCOLO INTEGRALE

Lavoro di maturità in matematica – Liceo cantonale Lugano 2

Docenti responsabili:

Prof. Gianandrea Bernasconi
Prof. Lucio Calcagno



5 dicembre 2000

Ivano Bonesana

LE ORIGINI DEL CALCOLO INTEGRALE

Lavoro di maturità in matematica – Liceo cantonale Lugano 2

Docenti responsabili:

Prof. Gianandrea Bernasconi
Prof. Lucio Calcagno

5 dicembre 2000

«Datemi un punto d'appoggio,
ed io vi solleverò il Mondo»

Archimede di Siracusa.

Lavoro di maturità in matematica
Liceo cantonale Lugano 2, Savosa 5 dicembre 2000

Docenti responsabili:
Prof. Gianandrea Bernasconi
Prof. Lucio Calcagno

In copertina: le prime 8'545 cifre di p, una moneta dell'epoca di Gerone II raffigurante Archimede da giovane e una rappresentazione del problema del volume della Sfera.

Particolare di Archimede
con uno specchio ustorio
(Archivio Drexel University, USA)

PREFAZIONE

Ai lettori,

Il calcolo infinitesimale è una conquista relativamente recente, la sua completa sistemazione logica è avvenuta nel XIX secolo ad opera di personaggi del calibro di Riemann e Gauss, dopo una lunga disputa tra le varie università, specialmente tedesche. E però sbagliato credere che il problema dell'infinitamente piccolo sia sorto solo in tempi così moderni, poiché ne troviamo tracce anche nell'antichità. Certo, allora la mentalità e i problemi analizzati presupponevano un metodo diverso di procedere, ma possiamo ben dire che già gli antichi lavoravano, consapevolmente, con procedimenti infinitesimali. Ma tali procedimenti erano in conflitto con le concezioni filosofiche del tempo e perciò misconosciute. A tutti noi è noto che la completa separazione tra filosofia e scienza, se è avvenuta, si è verificata a partire dal Seicento.

Il problema dell'infinitamente piccolo è intimamente legato a quello atomistico, che già con Democrito, filosofo greco del IV secolo a.C., si era fatto sentire. Dopo i riscontri negativi della filosofia greca antica il problema atomistico è passato nelle mani dei matematici, i quali hanno fornito numerose e straordinarie applicazioni di questo ragionamento. Tra queste spicca il lavoro di Archimede di Siracusa, vero e proprio precursore di quella fisica-matematica, che oggi si basa quasi esclusivamente su procedimenti infinitesimali. Archimede ci ha fornito addirittura un metodo di analisi volto a divulgare questi procedimenti non a torto giudicati importanti dal matematico siracusano.

In questo lavoro di ricerca non intendiamo in alcun modo spiegare il metodo moderno di integrazione o di derivazione, fondamenti del calcolo differenziale. Concentreremo piuttosto la nostra attenzione sui più significativi problemi che Archimede ha affrontato e sulle soluzioni che ci ha dato, poiché è proprio da tali soluzioni che nel Seicento, nel Settecento, nell'Ottocento e ancora nel Novecento si svilupperanno prima i puri metodi teorici, poi le sorprendenti applicazioni di analisi infinitesimale.

Ai lettori chiediamo solo di aver ben presenti i concetti basilari di «limite» e di «successione numerica», invitandoli a leggere attentamente le dimostrazioni ivi contenute, poiché alcune a prima vista possono apparire oscure. In realtà sono solo estremamente logiche. Per quanto riguarda la parte geometrica, i teoremi e le relazioni utilizzate non dovrebbero creare difficoltà poiché si tratta solo dei teoremi di Euclide e di Pitagora. A coloro i quali interessasse una lettura più approfondita e critica del lavoro di Archimede, consigliamo di conoscere il significato di «integrale semplice» e «integrazione», poiché chi ha confidenza con questi concetti non avrà difficoltà a ritrovarli nelle molte opere che Archimede scrisse più di duemila anni or sono. In ogni caso, al termine di questo fascicolo, i lettori troveranno degli allegati contenenti i teoremi più importanti utilizzati durante il lavoro, unitamente ai metodi di alcune dimostrazioni.

Abbiamo voluto inserire in questo lavoro anche delle descrizioni dei periodi storici, che verranno man mano trattati, al fine di fornire il quadro più completo possibile della situazione in cui le citate scoperte matematiche sono state fatte. Crediamo in tal senso che un'analisi della situazione da un solo punto di vista è insufficiente per capire la straordinaria realtà degli eventi che verranno trattati, la storia ci fornisce un ottimo supporto per capire il significato di molti avvenimenti che altrimenti ci possono apparire insensati o banali.

Il nostro viaggio attraverso i secoli inizierà nella Magna Grecia, a Siracusa nel 287 a.C.; passeremo attraverso le due leggendarie guerre Puniche e l'incursione di Annibale con gli elefanti attraverso le Alpi, giungeremo poi nell'oscuro Medioevo e toccheremo il Seicento italiano, tempo in cui la Rivoluzione scientifica premeva sull'oppressivo regime controriformista cattolico. Non ci spingeremo oltre, poiché nel corso dei secoli successivi ci troveremmo d'innanzi a problemi logici sui quali si potrebbero spendere migliaia di parole con il solo risultato di complicare ulteriormente un argomento già di per sé complesso.

Lasciamo a voi, lettori piena libertà di spaziare da un capitolo all'altro, con la speranza che al termine non si guarderà più Archimede come una specie di "scienziato pazzo" semisconosciuto, *ma come un vero e proprio ricercatore della verità attraverso la matematica, il linguaggio universale che lo ha portato alla celebrità.*

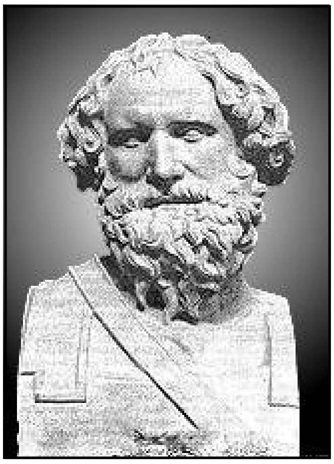
Buona lettura.

I. B.

CAPITOLO 1

INTRODUZIONE

L'ANALISI INFINITESIMALE NELLA STORIA



Il busto di Archimede. (IMSS, Firenze)

L'analisi infinitesimale è una delle conquiste più significative della storia della scienza. È intimamente legata con la riscoperta della quantificazione dei processi fisici, avvenuta nel XVII secolo. È il punto di partenza del tentativo di comprensione della natura attraverso i numeri, che porterà nel XVIII-XIX secolo alla scoperta dei numeri complessi e alla successiva nascita della geometria frattale. I calcoli infinitesimali permisero a Sir Isaac Newton di formulare la sua «Legge di Gravitazione Universale» e a Charles Augustin de Coulomb di scoprire la forza Elettrostatica e le analogie di quest'ultima con la gravitazione.

Anche in tempi più moderni il calcolo infinitesimale ha fornito un enorme contributo alla scienza. Basti pensare alle teorie della relatività di Albert Einstein, che utilizzò una "matematica" plasmata nell'Ottocento da Bernhard Riemann, conosciuto anche per aver completato e organizzato il calcolo integrale.

Aspetti al confine tra matematica pura e fisica. È questo il calcolo infinitesimale: matematica e fisica fuse in un connubio di straordinaria forza e precisione, tanto da riuscire quasi a dimostrare l'esistenza di Dio e la perfezione dell'universo soltanto con numeri e calcoli. Tutto ciò ha però avuto un'origine difficile e travagliata che si perde nella Grecia del V secolo a.C., al tempo in cui i primi filosofi studiavano la complessità della natura per capirne i fondamenti.

GENESI

Attorno al V-IV secolo a.C., la Grecia era la culla dello scibile umano. Tra guerre e dittature, nacque una prima forma di "democrazia" che concedeva ad alcuni libertà di operato mai viste prima, e forse neanche dopo. Atene, Stagira, Mileto, Elea, sono solo alcune delle numerose Polis greche che davano ospitalità ai grandi filosofi del passato quali Anassimandro, Eraclito, Parmenide, Democrito, e poi Socrate, Platone e Aristotele, per non parlare di comunità come quelle i Pitagorici.

Fu a quell'epoca che prese piede la teoria atomista, divulgata da Democrito. Con il termine Atomi (dal greco *a – tomos* = indivisibile), egli intendeva piccolissime particelle che componevano la materia e che costituivano la base della stessa. Aristotele, successivamente, trasformò quest'intuizione di Democrito falsandone i contenuti, ma mantenendone i concetti. Egli insegnava che la materia è composta da quattro elementi: terra, aria, acqua e fuoco; ognuno dei quali era distribuito in maniera diversa a seconda della natura del corpo. L'idea di particella indivisibile infinitamente piccola, lasciò il posto a quella di infinito potenziale e infinito attuale. Aristotele affermava che l'infinito non esiste in realtà, perché esiste solo in potenza, cioè ha la capacità di verificarsi, ma non può verificarsi da solo.

Proprio questa idea atomista, combattuta ed osteggiata da quasi tutto il mondo filosofico, religioso e sociale per oltre venti secoli, fu il seme da cui nacque il concetto di elemento indivisibile o infinitesimale che ritroviamo nella matematica moderna. Questo concetto, assieme a quello di infinito potenziale, fu accolto, ancor prima degli scienziati del XVI secolo, da alcuni matematici dell'antichità. La matematica era il solo modo per poter lavorare su progetti rivoluzionari, senza rischiare di essere considerati come pazzi, falsi profeti o, come avverrà più tardi, eretici. Tanto più che Aristotele considerava la matematica, al contrario del maestro Platone, solo come un futile processo di astrazione.

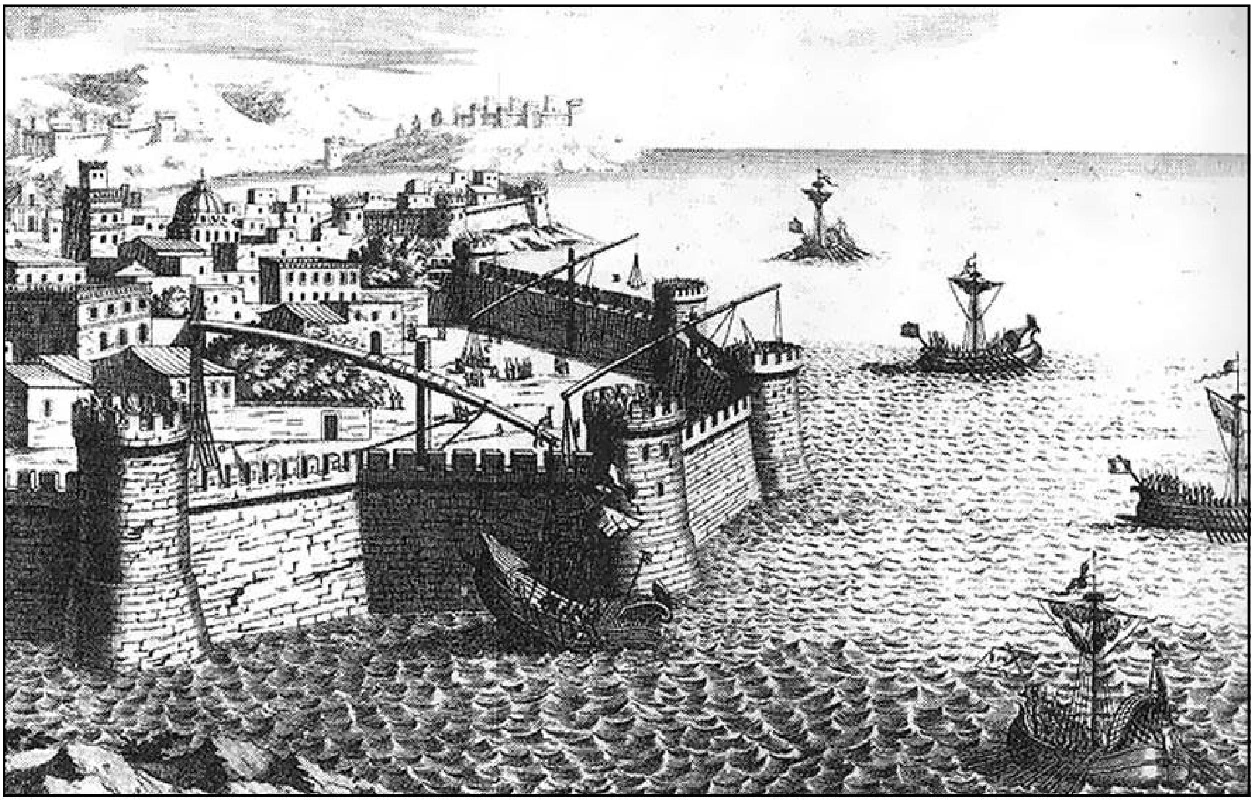
Fra coloro che non la pensavano così apparve, attorno al 250 a.C., un giovinetto appassionato di meccanica, statica, astronomia, matematica e geometria, in grado di concentrarsi su di un problema per giorni e giorni, dimenticando anche di mangiare e di lavarsi, finché non fosse riuscito a risolverlo. Il suo nome era Archimede di Siracusa.

L'eredità di Archimede

Archimede fu il primo ad affrontare problemi geometrici applicando nozioni di meccanica e di statica, riuscendo addirittura a costruire un metodo che anticipava di ben diciotto secoli il calcolo integrale. È significativo che il re dei matematici, Karl Friedrich Gauss, abbia ricevuto il testimone dell'analisi infinitesimale non da un suo contemporaneo, ma da un uomo vissuto ben diciotto secoli prima e giustamente considerato come il re della matematica antica.

Veniamo ora al concetto di integrale. Integrare significa determinare un'area. In termini moderni si integra generalmente una funzione, ma in antichità le funzioni non esistevano e i problemi di integrazione erano di natura squisitamente geometrica. Geometria e funzioni, apparentemente concetti distaccati, hanno generato ed adottato lo stesso metodo di analisi che ha superato indenne quasi tremila anni di storia. Questo metodo è fondamentalmente una fusione di procedimenti meccanici, fisici e matematici; esso parte da un sistema di analisi infinitesimale chiamato metodo di esaustione, inventato da Eudosso di Cnido, che si proponeva di riempire, letteralmente, un'area con delle figure note tali che la loro somma approssimasse l'area cercata. Archimede perfeziona questo metodo inserendo il concetto di momento statico delle figure. Come se si trattasse di "pesare" le aree e di trovare il punto d'equilibrio della bilancia utilizzata.

Al di là dell'esattezza del metodo per se stesso, possiamo affermare che il suo successo è dovuto alla sua straordinaria modernità e all'eccezionale dimostrazione che Archimede ne dà. Un esempio di rigorosità quasi ossessiva di uno scienziato costretto per forza di cose ad elaborare concetti allora avveniristici, con una matematica vecchia di secoli.



La battaglia tra Siracusani e Romani per la conquista della città; si notino le strane leve sporgenti dalle mura: sono gli artigli ideati da Archimede che permettevano ai siracusani di affondare le navi nemiche restando al sicuro all'interno della città fortificata.
(Archivio Drexel University, USA)

CAPITOLO 2

BIOGRAFIA

ARCHIMEDE DI SIRACUSA (SIRACUSA, 287 A.C. - 212 A.C.)

Le notizie giunteci su Archimede sono avvolte da un alone di mistero e di leggenda. Come è ovvio immaginare, l'enorme lasso di tempo che separa la sua epoca dalla nostra ha contribuito ad "inquinare" la sua vera storia, molta della quale si basa su aneddoti e racconti non sempre veritieri. Di certo sappiamo che visse in uno straordinario periodo storico di transizione tra il vecchio ed intaccato sistema politico greco, basato su città stato indipendenti, le Polis, e la nascente organizzazione imperiale romana che avrebbe caratterizzato la storia di tutto il bacino del Mediterraneo per i successivi sette secoli.

Questo periodo è identificato con il termine di età Ellenistica ed il suo inizio può essere fatto coincidere con la fine dell'impero di Alessandro Magno, esteso dai Balcani fino all'Egitto, alla Grecia e alla Persia. In questo clima di dominio incontrastato e di pace forzata, l'imperatore, illuminato dalla forte personalità filosofica e scientifica di Aristotele, suo maestro nonché consigliere, volle creare in Egitto una città fuori dal comune che avrebbe dovuto apparire come il centro del sapere e della conoscenza di tutto l'impero. Sarebbe dovuta apparire maestosa, inespugnabile ed inattaccabile, il suo solo ed unico scopo avrebbe dovuto essere quello di propagare e sostenere l'istruzione, la ricerca e il sapere: era Alessandria d'Egitto. Il suo splendore raggiunse il culmine in epoca tolemaica, quando la città divenne quel polo scientifico, artistico e culturale che mai nessun'altra città avrebbe eguagliato né allora né mai.

Archimede nacque a Siracusa nel 287 a.C. e compì i suoi studi ad Alessandria d'Egitto probabilmente presso la grande scuola euclidea. Gli *Elementi* di Euclide rappresentano una sorta di enciclopedia matematica dell'antichità. In essi sono raccolti teoremi, lemmi e proposizioni che tutti i matematici contemporanei e precedenti l'autore accettavano e condividevano, creando un quadro completo delle conoscenze dell'epoca in campo matematico e geometrico. Ad Alessandria Archimede iniziò anche i suoi studi di astronomia e meccanica, materia che lo porterà alla celebrità. La tradizione vuole che proprio sulle sponde del Nilo egli abbia inventato la cosiddetta «vite di Archimede»; un geniale sistema, in uso ancora oggi, in grado di portare l'acqua da un livello ad uno più alto, contrastando il naturale moto gravitazionale. Quest'invenzione rappresenta la perfetta unione di tecnica e di studi geometrici e matematici; la vite non è altro che un caso particolare di spirale che si estende in tre dimensioni. Essa fu la prima di una lunga serie di altre geniali invenzioni che costellano la vita del primo vero scienziato della storia.

Tornato a Siracusa, sotto la protezione di Gerone II ed in seguito di Gelone, monarchi della città, Archimede poté coltivare in piena libertà i suoi studi. Egli si dedicò alla geometria e alla matematica, ma anche alla meccanica, il vero e proprio oggetto dei suoi interessi; il suo primo libro fu forse proprio una raccolta di *Elementi*, di meccanica, appunto.

La meccanica antica ha molti richiami in quella che oggi si denomina genericamente come «fisica». Questo concetto, durante i secoli, ha avuto un'evoluzione che ne ha cambiato le connotazioni in maniera rilevante. Già con Aristotele (Stagira, 384-383 a.C. - Calcide, 322-321 a.C.) esisteva una «fisica», che però il filosofo, con spiccata avversione verso la matematica, sviluppava solo qualitativamente. Col passare del tempo la matematica si è vieppiù inserita nell'ambito della considerazione dei processi fisici o "naturali", com'erano definiti in antichità, tanto che oggigiorno i fisici, pur sempre considerando importante la descrizione qualitativa di un fenomeno, ritengono fondamentale se non indispensabile, una sua quantificazione, tale da portare a formulare una legge che possa descriverlo.

Il primo "fisico" in senso moderno dell'età antica, anche se può apparire strano, fu proprio Archimede. Egli infatti divulgò la fusione di analisi fisiche di oggetti matematici e dimostrazioni matematiche di procedure e fenomeni fisici. Egli creò una «meccanica razionale» che permetteva di passare dai problemi pratici alle speculazioni teoriche e viceversa, addirittura divenne talmente abile nel passare da ragionamenti meccanici alle relative dimostrazioni matematiche, che riuscì a superare il suo maestro, Euclide, anticipando quello che in futuro sarà chiamato «calcolo infinitesimale».

D'altra parte la passione per la tecnica che pervadeva il sommo siracusano era chiaramente percepibile; «Datemi un punto d'appoggio ed io vi solleverò il mondo.», celeberrima frase che assume e riassume molte sfaccettature del personaggio Archimede. Come vedremo in seguito i concetti di leva e momento possono, da soli, costituire il nocciolo centrale del *Metodo*. Dal punto di vista personale, questa frase rivela il carattere sicuro e deciso del siracusano. Carattere che emerse negli innumerevoli aneddoti che accompagnano la sua vita. Di questi aneddoti una delle fonti più affidabili è Plutarco, storico greco vissuto nel I secolo d.C., il quale riferisce di un "esperimento" che Archimede fece per far comprendere al re di Siracusa quanto siano importanti le leve ed i loro principi.

> *Gerone II, scettico circa la potenza di questi semplici congegni meccanici, chiese una dimostrazione pratica ad Archimede il quale lo accontentò in modo alquanto singolare: prese un mercantile a tre alberi della flotta reale, che fu tirato in secco con grande fatica e l'impiego di molte persone, v'imbarcò molti uomini e il suo carico abituale, poi si sedette lontano e senza nessuno sforzo, muovendo tranquillamente con una mano un sistema di carrucole, lo fece avvicinare a sé dolcemente e senza sussulti, come se volasse sulle onde del mare.*[1]

I contributi che il siracusano diede rientrano anche nei campi dell'ottica, dell'idraulica, e dell'idrostatica. Notissima, quasi biblica, a questo proposito è la vicenda della corona votiva di Gerone II, sempre riportata da Plutarco.

> *Sospettando che il suo orefice avesse sostituito l'oro ricevuto per fare una corona con qualche lega meno preziosa, Ierone [Gerone II] chiese ad Archimede di determinarne la vera composizione. Lo studioso combatté a lungo col problema finché un giorno, durante quello che doveva essere uno dei suoi rari bagni, fu folgorato dalla soluzione. Allora saltò fuori dalla vasca e si mise a correre per le strade di Siracusa gridando «Eureka! Eureka!» [«Ho trovato! Ho trovato!»]. Purtroppo era così assorto nella sua meravigliosa scoperta che aveva dimenticato di mettersi qualcosa addosso. Cosa abbiano pensato i concittadini nel vederlo correre fra loro nudo come un verme rimarrà per sempre un mistero.*[1]

È probabile che questo racconto sia inventato, ma è senz'altro vero che Archimede scoprì i principi fondamentali dell'idrostatica. Il trattato che ci ha lasciato, *Sul galleggiamento dei corpi*, espone le sue idee sull'argomento. In quest'opera si trova anche quello che verrà chiamato il principio della «spinta di Archimede»: un corpo immerso in un fluido riceve una spinta dal basso verso l'alto pari al peso del volume di fluido che viene spostato.

I testi che Archimede ci ha lasciato sono molti, alcuni di essi ci sono giunti integri, altri sono ridotti a frammenti o a poche pagine, altri ancora sono purtroppo andati perduti. Il suo primo volume, come detto, fu forse una raccolta di *Elementi di meccanica*, contenente trattati teorici sui momenti statici e sui centri di gravità del triangolo, del trapezio e del parallelogrammo generico. Proprio estendendo questa teoria ai centri di gravità di coni, cilindri, superficie limitate da sezioni coniche e dei loro solidi di rotazione (*Sull'equilibrio dei piani*, libri *I* e *II*) arrivò ad analizzare figure allora poco note, trovando nuovi problemi superiori alla geometria tradizionale elaborata e gelosamente custodita dalla scuola dei matematici alessandrini. Archimede superò facilmente questi problemi con l'ausilio della sua «meccanica razionale». Tra lo scetticismo generale degli alessandrini, il siracusano riuscì a quadrare il segmento parabolico (*Quadratura della parabola*), applicando metodi meccanici che dimostrò con rigorosi calcoli matematici.

Archimede sapeva di aver scoperto un nuovo metodo di analisi, ma non avrebbe mai immaginato che questo avrebbe rivoluzionato la geometria e, addirittura, l'intera matematica. Per assicurarsi che i suoi calcoli fossero realmente corretti, inviò al suo amico Conone da Samo, grande e perspicace matematico alessandrino, una prima stesura di quello che diverrà il *Metodo sui teoremi meccanici*: sette problemi, due teoremi sulla sfera, due sul paraboloide di rivoluzione e alcune proposizioni sulle spirali; con il desiderio che il destinatario ne verificasse le dimostrazioni.

Archimede era solito, prima di pubblicare un testo, inviare a suoi amici di Alessandria la "bozza" per discuterne i contenuti ed eventuali incongruenze che potevano venire riscontrate ed è forse proprio per questo che di lui ci sono giunti un numero relativamente alto di testi. Purtroppo Conone morì prima di essere

1 I testi sono tratti da Plutarco, *La vita di Marcello*; nella versione riportata in: William Dunham, *Viaggio attraverso il genio*, ed. Zanichelli 1992; La Vita di Archimede pp.104-109

riuscito nell'intento. Gli alessandrini tentarono, con l'indifferenza, di far dimenticare l'operato del siracusano e in questo modo commisero un grave errore. Archimede aveva sempre meno fiducia verso la scuola egizia; pare infatti che il siracusano, almeno da giovane, non fosse preso troppo sul serio dai matematici alessandrini.

Infatti, in alcuni suoi frammenti osservava che

> «Sono già passati molti anni dopo la morte di Conone; ma io non ho saputo che qualcuno si sia occupato anche di uno solo di quei problemi».

L'indifferenza e l'ambizione dei matematici alessandrini non era giustificata ed Archimede si prese la giusta vendetta: verificò che le proposizioni sulla sfera, inviate a Conone, erano sbagliate e confessando l'errore ridusse al silenzio i matematici di Alessandria facendo osservare come

> «Coloro che vanno dicendo che essi scoprono tutto, senza però darne alcuna dimostrazione, possono esser colti in fallo per avere qualche volta proclamato di scoprire cose impossibili».

Ma Archimede sapeva bene che la lunga e onorevole tradizione alessandrina non poteva essere ignorata, pertanto, persuaso dell'importanza delle sue ricerche, riprese lo studio delle sue scoperte e ne confermò la validità usando il vecchio metodo di esaustione parallelamente al suo. È per questo motivo che in molti testi di Archimede si trovano due, o più, dimostrazioni relative allo stesso problema: prima geometriche e meccaniche, poi puramente matematiche.

Archimede si occupò anche delle spirali (*Sulle spirali*), interesse nato dall'evoluzione delle superfici da lui analizzate e dei solidi, di rotazione e non, che studiò appassionatamente. Basandosi sugli *Elementi* di Euclide determinò i rapporti tra i volumi del cono, del cilindro, della piramide e della sfera, della quale calcolò anche la superficie in *Sui conoidi e sugli sferoidi* e *Sulla sfera e sul cilindro*, che ritenne come sua opera massima. Egli, verosimilmente, trovò dapprima il metodo per calcolare l'area del cerchio basandosi su successioni di poligoni inscritti e circoscritti allo stesso, metodo che ritroviamo in un piccolo quanto importante trattato di geometria che spazia ampiamente nel calcolo infinitesimale: *Misura del cerchio*, composto di sole tre proposizioni. Una volta dimostrata l'efficacia delle scoperte contenute in questo trattato, dedusse che esse dovevano in qualche modo essere valide anche con i solidi di rotazione delle figure piane trattate: quindi sfere, coni, cilindri, ecc. L'intuizione fu semplicemente geniale, perché applicando esattamente lo stesso ragionamento determinò le formule del volume e della superficie della sfera generica, i rapporti volumici tra sfera e cilindro e tra sfera e cono. Ancora oggi gli diamo ragione quando egli considera questo lavoro come il coronamento della sua brillante carriera di studioso.

Archimede fece grandi cose anche in quei campi che oggi chiamiamo geometria analitica e analisi infinitesimale. Ancora in *Misura del cerchio*, ad esempio, utilizzò, perfezionò e divulgò il metodo di esaustione, già ideato da Eudosso di Cnido tempo prima, con il quale riuscì a formulare precisamente il teorema per determinare l'area del cerchio, le misure della circonferenza e dell'arco e riuscì a capire e ad approssimare con straordinaria precisione (meno di 1/10'000 di errore) il valore del rapporto costante, già noto ad Euclide, tra circonferenza e diametro: π.

Per completare l'operato di Archimede vi è *Arenario*, un trattato sull'algebra ed il calcolo, nato dall'esigenza di padroneggiare il mondo fisico attraverso la matematica. *Arenario* appare come un'indagine su problemi di calcolo solitamente ignorati dai matematici dell'epoca che li ritenevano «più degni di schiavi che di uomini di studio». Il siracusano intendeva dimostrare come fosse possibile scrivere «un numero più grande del numero di granelli di sabbia che potrebbero essere contenuti nell'universo fino alle stelle fisse» (all'epoca si credeva che l'Universo fosse composto di sfere concentriche su ciascuna delle quali si trovava un pianeta, l'ultima di queste sfere, la più esterna, conteneva le stelle fisse) Malgrado la limitazione nella concezione numerica dell'epoca, Archimede dovette lavorare nell'insieme Q dei numeri razionali anche se concepì quelli irrazionali, riuscì senza difficoltà nell'intento, anticipando anche taluni principi di quello che sarà nel XVII secolo d.C. il calcolo logaritmico.

Purtroppo l'età Ellenistica volgeva ormai al termine; i segnali di questo inesorabile declino furono gli scontri tra il crescente espansionismo di Roma e le altre potenze mediterranee che portarono alle guerre con Cartagine, con l'Egitto e con la Grecia. Nel corso delle prime due guerre Puniche (264-241 a.C. e 218-201 a.C.) Roma, con la sua imponente potenza militare iniziò la sua conquista del Mediterraneo fino ad allora posseduto per la maggior parte da Cartagine (attuale Tunisi). Durante la prima guerra in Sicilia il conflitto più acceso si ebbe a Messina, dove si era insediato un presidio armato cartaginese con lo scopo di stabilire in quella città il luogo da cui sarebbe partita la prevista, ma mai realizzata, conquista della penisola italica volta ad arrestare l'espansione romana. Gerone II di Siracusa, una delle poche Polis della Magna Grecia che i romani non avevano ancora conquistato, si schierò con i cartaginesi sperando nella riuscita dell'operazione. Siracusa uscì quasi indenne dalla prima guerra Punica, ma nella seconda non ebbe scampo alcuno.

A causa della leggendaria incursione di Annibale, che attraversò le alpi con gli elefanti e seminò il disordine in Italia, unitamente ad alcune importanti sconfitte marittime con Cartagine, violenti fermenti politici a Roma fecero dichiarare una dittatura provvisoria. Quinto Fabio Massimo, il dittatore chiamato «il temporeggiatore», fece intraprendere una guerra generale dispiegata su vari fronti, isolando Annibale e il suo drappello, riconquistando i territori perduti e infliggendo a Cartagine i colpi più duri: la conquista di Messina e la sconfitta sul Mediterraneo, sino ad allora dominio incontrastato dei nordafricani.

Gelone, succeduto a Gerone II al trono di Siracusa, si trovò a doversi difendere dalla terribile morsa di Roma, ma aveva ancora una risorsa da sfruttare: Archimede. A tale proposito vorrei citare un passo di William Dunham[1] che ricostruisce in maniera eccellente la battaglia tra siracusani e romani:

Nel 212 a.C. i romani, guidati dal generale Marcello, attaccarono Siracusa. Di fronte alla minaccia, Archimede corse in difesa della patria progettando una serie di armi di grande efficacia e trasformandosi, se così si può dire, in una vera e propria industria bellica. Citiamo dalla Vita di Marcello, che Plutarco, il grande biografo greco, scrisse quasi tre secoli dopo gli avvenimenti. Sebbene il soggetto di Plutarco sia la vita del generale romano, dal suo scritto traspare chiaramente l'ammirazione che egli nutriva per Archimede, della cui attività dà un resoconto partecipe e colorito.

«Marcello», scrive Plutarco, «levò il campo e raggiunse Siracusa con tutto l'esercito. Appena ebbe sistemato l'accampamento nei pressi della città, vi mandò alcuni ambasciatori». Ma i siracusani rifiutarono ogni trattativa e allora il generale attaccò le mura sia da terra, con le truppe, che dal mare usando sessanta galee con armamento pesante. Egli confidava «nel numero e nello splendore delle attrezzature e nella fama che lo circondava», ma non aveva tenuto conto di Archimede e delle sue diaboliche macchine da guerra.
Sempre secondo Plutarco, le legioni romane marciarono verso le mura della città, credendosi invincibili.
Ma Archimede cominciò a caricare le sue macchine e a far piovere sulla fanteria nemica proiettili di ogni genere. Grandi masse di pietra cadevano dall'alto con fragore e velocità incredibili, né c'era modo di difendersi dal loro urto: rovesciavano a terra tutti coloro che incontravano, e scompigliavano i ranghi.

Le forze navali non se la cavavano meglio, perché contemporaneamente dalle mura venivano proiettati in fuori all'improvviso dei lunghi pali, che si puntavano in direzione delle navi, e le affondavano senza rimedio, colpendole dall'alto con dei pesi, oppure le sollevavano dritte, afferrandole per la prua con delle mani di ferro o con dei becchi simili a quelli delle gru, per poi immergerle nell'acqua con la poppa. Altre, mediante cavi azionati dall'interno della città, erano fatte girare vorticosamente e sballottare qua e là, finché si sfracellavano contro le rocce e gli scogli posti sotto le mura, con grave massacro degli uomini che erano a bordo […]
Lo spettacolo, era «davvero terrificante», e non ci sentiamo di dargli torto. In queste circostanze Marcello pensò che fosse più prudente ritirarsi e così richiamò le forze di terra e di mare. Tenuto un consiglio di guerra, i romani decisero di tentare un assalto notturno, contando sul fatto che le tremende macchine di Archimede[2] si sarebbero rivelate inefficaci se gli attaccanti, col favore delle tenebre, fossero riusciti a portarsi a ridosso delle mura. Ancora una volta i romani ebbero una spiacevole sorpresa. Previdente, Archimede aveva considerato un'eventualità del genere, così non appena i romani, credendosi inosservati, si accostarono, «furono accolti con una gragnuola di colpi e di proiettili: pietre cadevano quasi perpendicolarmente sulla loro testa, dalle mura partivano dardi in ogni direzione».

I romani, terrificati, si ritirarono, ma solo per cadere nel raggio d'azione delle armi a lunga gittata, già preparate da Archimede, armi che fecero tra loro una carneficina. Le gloriose legioni romane, per una volta sopraffatte da incomprensibili astuzie, cominciarono a convincersi di «combattere contro qualche dio, che li danneggiasse in mille modi dall'alto, senza che nessuno lo vedesse».
Sarebbe un eufemismo dire che, a questo punto, Marcello aveva qualche problema col morale delle sue truppe. Egli chiedeva di continuare l'assalto con rinnovato coraggio, ma i romani, un tempo invincibili, non ne volevano più sapere. I soldati, addirittura, erano «così atterriti che, se appena si avvistava una fune o un legno sporgente di poco sopra le mura: "Eccolo, gridavano, sta dirigendo qualcuno dei suoi ordigni su di noi", e si davano a pazza fuga». Sapendo che la prudenza è un ingrediente essenziale del valore, Marcello decise di abbandonare

---

[1] Tratto da: William Dunham, Viaggio attraverso il genio, ed. Zanichelli 1992; Capitolo 4: Archimede e la determinazione dell'area del cerchio (225 a.C. circa), La vita di Archimede pp. 104-109

[2] Si attribuisce ad Archimede, ne è in dubbio la realtà, ma è nella tradizione, anche l'invenzione dei cosiddetti specchi ustori: grandi scudi riflettenti che concentrerebbero i raggi del sole in poche decine di centimetri, riuscendo in tal modo ad incendiare le navi romane a distanze notevoli (N.d.A.).

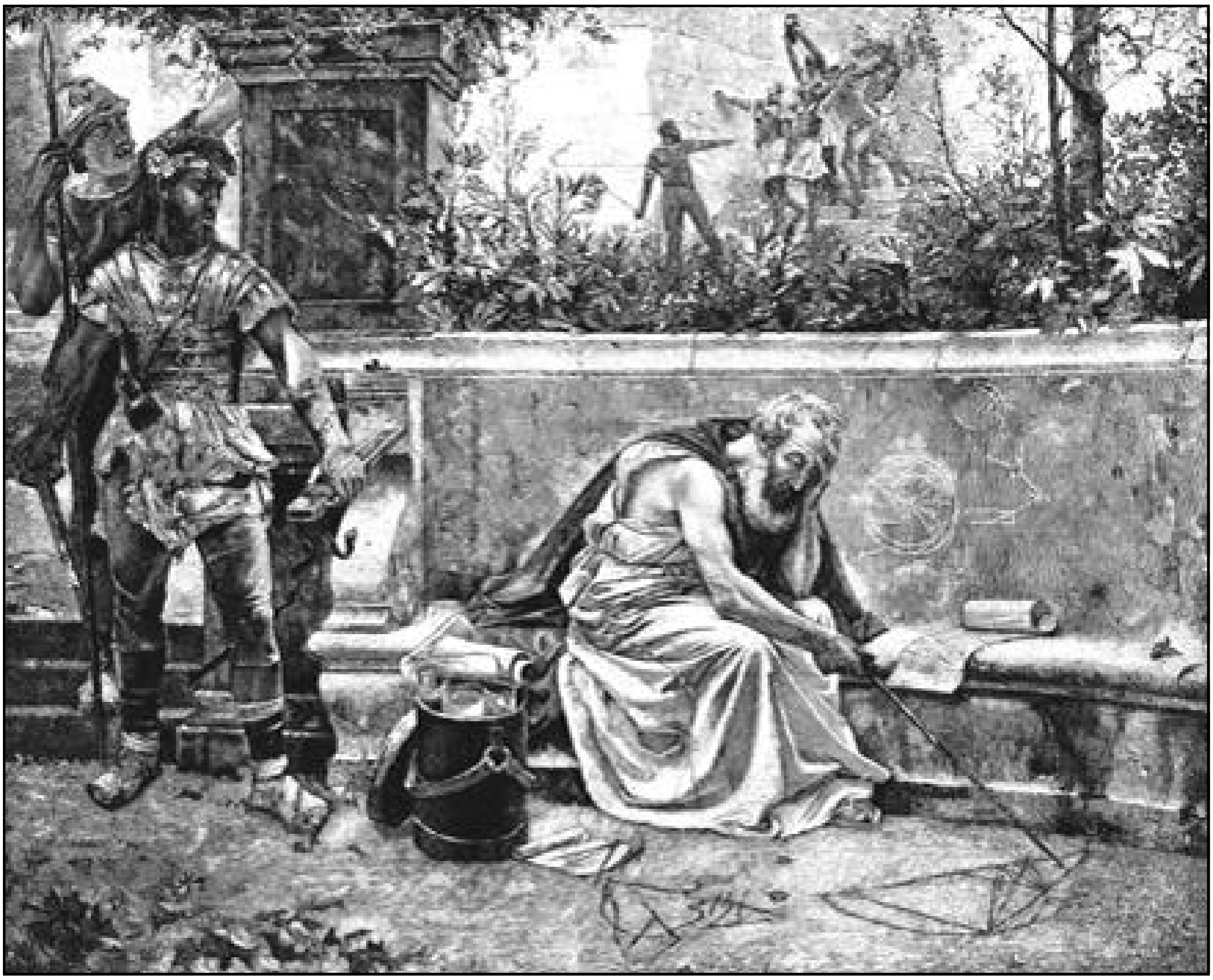
la tattica dell'attacco frontale. Iniziò allora un lungo assedio della città nel tentativo di prendere i siracusani per fame. Il tempo passava e la disposizione delle forze restava immutata. Finché, durante una festa in onore di Diana, gli abitanti della città si abbandonarono completamente «al vino e ai divertimenti» e allentarono la sorveglianza delle mura. 1 romani seppero cogliere l'occasione, individuarono la parte delle mura che era più sguarnita, la espugnarono e irruppero nella città mettendola a ferro e fuoco. Si dice che Marcello piangesse, guardando quella bella città, conscio della distruzione che i suoi uomini vi avrebbero portato. E in effetti i romani non trattarono Siracusa meno duramente di come avrebbero trattato, circa sessantasei anni dopo, Cartagine.
Ma ciò che più addolorò Marcello fu la morte di Archimede, perché il romano provava un grande rispetto per quel suo nemico così ingegnoso. Come racconta Plutarco:
Per una malaugurata circostanza lo scienziato si trovava solo in casa e stava considerando una figura geometrica, concentrato su di essa, oltreché con la mente, anche con gli occhi, tanto da non accorgersi che i romani invadevano e conquistavano la città. A un tratto entrò nella stanza un soldato e gli ordinò di andare con lui da Marcello. Archimede rispose che sarebbe andato dopo aver risolto il problema e messa in ordine la dimostrazione. Il soldato si adirò, sguainò la spada e lo uccise.

Della fine del soldato non si sa nulla, ma di certo Marcello non sarà stato clemente con chi distrusse qualcosa paragonabile al Pentagono di oggi.

Archimede, invece, venne sepolto sulle colline vicino la città e, a prova di quale grande e universalmente riconosciuto scienziato fosse, come epitaffio non ebbe parole o frasi di riconoscenza, ma solo una scultura in pietra raffigurante un cilindro contenente una sfera, in riferimento all'opera che lui stesso non ha esitato a definire il suo più grande capolavoro: *Sulla sfera e sul cilindro*. Nonostante l'indubbio e riconosciuto valore delle opere archimedee, strana sorte toccò alla sua tomba. Sepolta da rovi e vegetazione in epoche successive la sua morte venne riscoperta, come vuole la tradizione, da Cicerone durante un sopralluogo a Siracusa. In seguito si persero le tracce del sepolcro forse distrutto in epoche più recenti. Al suo posto un'altra tomba, di epoca romana, è ora chiamata affettuosamente «Sepolcro di Archimede» come prova di quale amorevole significato possieda Archimede nella storia del mondo. Ma ciò che ne ha fatto un personaggio così noto ed amato è stata la tradizione, fatta di storielle, racconti e aneddoti, che ha ulteriormente rafforzato la già straordinaria popolarità dello scienziato dovuta alle sue innumerevoli ed utilissime invenzioni, molte delle quali sono giunte fino a noi e sono tuttora utilizzate per gli scopi per cui erano state disegnate, più di 2000 anni fa.

La poliedricità e la sorprendente modernità del genio archimedeo si esprimono non solo negli argomenti trattati, ma anche nel modo con cui egli lavorava; è sconcertante pensare che possedesse un tale rigore e una tale raffinatezza logica per cui calcoli, concetti e ragionamenti che oggi facciamo fatica ad immaginarci o che riusciamo a malapena ad esprimere con l'aiuto di sofisticati calcolatori, erano per lui gestibili con soltanto una riga non graduata ed un compasso.

A giusta ragione ad Archimede viene associata la paternità di quella disciplina che oggi è fondamentale in tutti i campi della scienza e della tecnologia: la «fisica-matematica» o, come si direbbe in termini moderni, la «matematica applicata». Questa scienza fu osteggiata dai sapienti dell'epoca del siracusano e la sua vita è stata una continua e tormentata lotta per la sopravvivenza contro chi la considerava una «scienza impura» poiché univa tecnica materiale e idee matematiche. Solo nel XVI secolo con alcuni matematici italiani come Cavalieri sarebbe iniziata la sua rinascita e l'affermazione che l'avrebbe portata al trionfo con personaggi del calibro di Galilei e Keplero nel Seicento, Newton e Leibniz nel Settecento e Gauss, Riemann e Cauchy nell'Ottocento.



«La morte di Archimede» da un'opera del francese Gustave Courtois (1853-1923); conservata nella galleria privata del Barone Lionel Rothschild.
(Print and Picture Collection of the Free Library of Philadelphia, USA)

Francobollo commemorativo delle Poste Italiane, emesso nel maggio del 1983, in onore di Archimede. L'immagine del siracusano è quella del busto conservato all'IMSS di Firenze. Si noti, a sinistra del francobollo, la vite senza fine che solleva l'acqua.
Questa è un'unlteriore dimostrazione di quale popolarità abbia conservato Archimede anche in tempi recentissimi.

La bibliografia di Archimede

Le opere di Archimede erano note sin da tempi antichi, ma vennero riscoperte e valorizzate solo nel corso degli ultimi quattro secoli, a partire, come vedremo, dal Seicento fino ad arrivare al 1906, anno in cui L. Heiberg ritrovò l'ultimo dei manoscritti del siracusano: il *Metodo sui teoremi meccanici*.

Fino a quell'anno erano noti molti testi in versioni pressoché integrali ed alcuni frammenti di altre opere, tra cui il *Metodo*. Restava però il problema dell'ordinamento cronologico delle opere e dei frammenti. Quasi tutti gli studiosi attuali sono concordi sul seguente ordinamento cronologico, entro il quale, però non si trova il Metodo. In seguito ne vedremo il motivo.

Sull'equilibrio dei piani, lib. I
[επιπεδων ισορροπιων α′];

Quadratura della parabola
[τετραπαγϖνισμοζ παραβοληζ];

Sull'equilibrio dei piani, lib. II
[επιπεδων ισορροπιων β′];

Sulla sfera e sul cilindro, lib. I, II
[περι σφαιραζ ξαι ξυλινρου α′, β′];

Sulle spirali
[περι ελιξων];

Sui conoidi e sugli sferoidi
[περι χωνοειδεων χαι σφαιρειδεων];

Sui corpi galleggianti, lib. I, II
(traduzione latina di Guglielmo di Moerbeke, XIII secolo);

Misura del cerchio
[χυχλου μετρησιζ];

Arenario
[ψαμμιτη].

La scoperta del Metodo sui teoremi meccanici

Nel 1906 J. L. Heiberg[1] , si recò presso la Biblioteca del Metochion ad Istambul, Costantinopoli in epoca romana, per esaminare un antico palinsesto proveniente dal Monastero del Santo Sepolcro in Gerusalemme. Il «*Codex rescriptus Metochii Costantinopolitanii S. Sepulchri monasterii Hierosolymitani 355, IV*», così appariva nell'archivio del monastero, era un antico codice manoscritto composto da 185 fogli. Sette di essi erano di natura cartacea e risalivano al XVI secolo, mentre altri 177 erano pergamene molto più antiche. In questa parte del manoscritto si notavano due scritture sovrapposte: la prima, superiore, era fatta risalire ai secoli XII-XIII o XIII-XIV e conteneva un Eucologio (libro di preghiere rituali nella chiesa orientale) Il secondo strato del documento inferiore, conteneva una bella scrittura greca del X secolo, quasi interamente leggibile.

In antichità, non esisteva la carta così come oggi la conosciamo, per poter scrivere venivano utilizzate fibre vegetali, come il papiro, o pelli di animale conciate ed appiattite: le pergamene. Per quest'ultime il

[1] Il testo del manoscritto fu per la prima volta pubblicato da J. L. Heiberg in *Hermes*, XLII, 107, con introduzione e commento.

procedimento di fabbricazione era lungo e costoso e non tutti potevano permettersene di nuove ogniqualvolta lo desiderassero, perciò si procedeva al riciclo delle pergamene già utilizzate da altri in precedenza. L'operazione di riciclo consisteva nell'eliminazione della scrittura preesistente e si avvaleva di due tecniche fondamentali: la raschiatura, che prevedeva l'eliminazione di uno strato della pergamena, e la lavatura, un semplice bagno in grado di sciogliere l'inchiostro precedente.

Fortunatamente nel caso del palimpsesto di Costantinopoli era stata adottata la seconda tecnica, quella della lavatura. Quindi traspariva, chiaramente leggibile, la scrittura antica inferiore, nella maggior parte dei 177 fogli ad eccezione di nove illeggibili, ventinove senza traccia di sovrapposizione e alcuni altri, che lasciano trasparire solo poche parole.

Il documento venne letto attentamente e si notò che la parte in greco conteneva frammenti già noti dei libri: *Sulla sfera e sul cilindro*, *Sulle spirali* (quasi completo), *Misura del cerchio*, *Sull'equilibrio dei piani*, *Sui corpi galleggianti* (quasi completo) e *Stomachion* (introduzione e le prime due proposizioni); tutti dello stesso ben noto autore. Inoltre si riscontrarono ulteriori brani, alcuni sconosciuti, altri collegati a frammenti noti. Questi brani "inediti" formavano l'intero testo della lettera «*Archimede ad Eratostene: Metodo sui teoremi meccanici*».

Per la sua qualità e la completezza, il manoscritto si rivelò una vera miniera di informazioni; in breve tempo fu possibile redigere in maniera finalmente completa il testo intero di un nuovo libro sino ad allora semisconosciuto, che prese il nome dalla prima riga del testo: *Archimede ad Eratostene: Metodo sui teoremi meccanici*. Nel quale Archimede spiegava il procedimento per calcolare superfici o volumi e per quadrare o cubare figure, rispettivamente, piane o solide.

Il *Metodo* non è altro che una di quelle lettere che Archimede inviava ai suoi amici, in questo caso Eratostene, prima di pubblicare un libro, in modo da raccogliere i pareri e le critiche dei lettori. In questo caso Archimede sembra voler concludere la discussione di alcune proposizioni e teoremi già contenute in opere precedenti, delle quali fornisce rigorose dimostrazioni sia geometriche, sia matematiche, sia meccaniche.

La cronologia degli scritti

Con la scoperta del *Metodo* sorse anche il problema cronologico: i concetti contenuti in quel volumetto erano i più vari possibili perché spaziavano dalle figure piane ai solidi, dal metodo di esaustione alla doppia riduzione all'assurdo.

Dato che Archimede aveva l'abitudine di inviare, ai suoi amici di Alessandria, una copia dei teoremi che intendeva pubblicare perché fossero verificati, capitava che passasse molto tempo dalla formulazione dei concetti alla loro concreta apparizione sotto forma di volumi. Così si può pensare che i due teoremi che costituiscono l'argomento principale del *Metodo*, fossero già stati inviati ad Eratostene prima della pubblicazione del volume.

Per la classificazione cronologica ci si basava sui testi già noti, che potevano essere ordinati tramite i riferimenti diretti o indiretti che vi erano contenuti. Un grande contributo lo davano anche le testimonianze dei contemporanei di Archimede che parlavano di questi testi nelle loro opere.

Ad esempio, alcuni frammenti del *Metodo*, come tre proposizioni (I, XII e XVI), vennero ritrovate nei *Metrica*, una memoria di Erone (I secolo a.C.), il quale faceva precisi riferimenti al libro del siracusano. Ironia della sorte, il libro di Erone servì solo come testimonianza dell'effettiva esistenza del testo archimedeo, poiché venne trovato poco dopo il Metodo, nella stessa biblioteca.

Un altro sistema era quello di osservare i contenuti degli scritti. Solitamente Archimede riempiva i suoi libri di riferimenti ad altre opere, sue o di altri autori, perciò è possibile utilizzare i suoi rimandi, abbinandoli ai contenuti, per localizzare il legittimo posto nella cronologia degli scritti.

Esaminando i contenuti si nota che *Quadratura della parabola*, *Sulle spirali* e *Sulla sfera e sul cilindro* assieme con la lettera a Conone di Samo (v. biografia) e *Sui conoidi e sugli sferoidi* sono anteriori rispetto al nostro testo. Ma nell'introduzione del *Metodo* si parla di teoremi «già scoperti», riguardanti conoidi e sferoidi. Di sferoidi non vi era nessun accenno nella lettera a Conone, perciò il *Metodo* deve far seguito a qualche altro scritto indipendente o forse proprio di *Sui conoidi e sugli sferoidi*, in una stesura diversa e precedente quella a noi nota.

Questa tesi sembra la più plausibile, tanto che oggi si ritiene che il *Metodo* sia stato sviluppato durante tutta la vita del siracusano, ma che sia apparso, nella sua forma completa, soltanto alla fine della produzione archimedea come compimento del suo grande operato.

Capitolo 3

Il metodo di esaustione

Forse la prima testimonianza di un procedimento infinitesimale è il *Metodo di esaustione*. Venne inventato da Eudosso di Cnido e fu largamente utilizzato da Euclide e da Archimede, così come da tutti gli altri matematici dell'antichità. Esso rappresenta uno schema fisso al quale si ricorre quando si vuole dimostrare l'equivalenza di due grandezze omogenee Q e Q´ (aree, volumi, lunghezze, etc.).

Eudosso di Cnido (Cnido, 406-355 a.C.)

Eudosso nacque nel 406 a.C. a Cnido, dove morì nel 355 a.C., dopo aver compiuto parecchi viaggi ed aver frequentato l'Accademia di Platone ad Atene.

Per poter ricostruire la vita di Eudosso dobbiamo rivolgerci agli storici latini che hanno descritto le vicende ed i personaggi della Grecia del V secolo a.C.. Da queste fonti sappiamo che egli era astronomo e filosofo, seguace di Platone, anche se annoverato da Diogene Laerzio tra i pitagorici. Durate un suo viaggio di studio in Egitto approfondì le conoscenze sull'anno tropico, al quale diede una durata di 365 giorni ed ¼, arrivata sino a noi nel calendario giuliano.

La sua ipotesi astronomica delle *Sfere omocentriche*, che avrebbe fatto scuola in seguito con Aristotele e Callipro, forniva una soluzione al problema di trovare una spiegazione del moto apparente dei corpi celesti ammettendo che la Terra fosse immobile. Egli introdusse la concezione delle sfere solide rotanti attorno alla Terra fissa, che sorreggevano i quattro pianeti allora noti, il Sole e la Luna. Questa ipotesi venne rielaborata ed ampliata e costituì la base del geocentrismo aristotelico-cristiano, che durò fino al Seicento, quando venne sostituito dal modello eliocentrico copernicano.

Eudosso si occupò anche di filosofia, approfondendo la teoria della metessi: partecipazione delle cose tangibili, mondo immanente, alle idee, mondo trascendente. Essendo seguace di Platone introdusse nelle sue ricerche anche la matematica, costruendo un metodo di approssimazione, basato su di un procedimento infinitesimale, che verrà chiamato "metodo di esaustione". Questo metodo ebbe molto successo in antichità: venne anche ripreso da Archimede, come vedremo, il quale lo applicò al cerchio per determinarne l'area.

Nel corso della riscoperta dei classici scientifici del Seicento, Luca Valerio utilizzò un metodo di analisi simile a quello di Eudosso per le sue considerazioni infinitesimali, tra cui la determinazione dell'area del segmento parabolico. Nel corso dell'Ottocento, con Bernhard Riemann, il metodo di esaustione rinacque sottoforma di calcolo integrale moderno.

Enunciato

Due grandezze omogenee Q e Q´ sono equivalenti, quando esistono, per ogni ε, altre due coppie di grandezze A e A´, B e B´, fra loro equivalenti, le quali comprendono rispettivamente Q e Q´, in modo che la loro differenza sia minore di un prefissato ε.

$$\begin{array}{ccc} A \equiv A' & \wedge & B \equiv B' \\ A < Q < B & \wedge & A' < Q' < B', \end{array}$$

$$B - A \equiv B' - A' < \varepsilon$$

Se Q e Q´ sono effettivamente equivalenti, allora

$$A = A' \qquad \wedge \qquad B = B'$$

ESEMPIO

Per determinare un numero nell'insieme R dei numeri reali, si può costruire un intervallo di altri due numeri, uno maggiore ed uno minore, attorno al numero cercato. L'intervallo può essere "largo" o "stretto", può contenere cioè più o meno numeri.

Consideriamo il numero 3, nell'insieme R.

$$3 \in [1\,,5]$$

questo è vero, ma la condizione non è valida solo per il tre, ma anche per il 3,1 o il 4. Bisogna allora precisare l'intervallo.

$$\begin{gathered} 1 < 3 < 5 \\ 1{,}5 < 3 < 4{,}5 \\ 2 < 3 < 4 \\ 2{,}5 < 3 < 3{,}5 \\ 2{,}8 < 3 < 3{,}2 \\ 2{,}9 < 3 < 3{,}1 \\ 2{,}978 < 3 < 3{,}022 \\ 2{,}990 < 3 < 3{,}010 \\ \ldots \end{gathered}$$

Si costruiscono, quindi, due successioni numeriche che tendono al numero, o alla grandezza, cercati. Nel nostro caso 3. Una successione sarà crescente, avrà il numero come limite e tutti i suoi termini saranno minori del numero considerato; l'altra successione sarà decrescente, avrà ancora come limite il numero considerato, ma tutti i suoi termini saranno maggiori del numero considerato.

INTERPRETAZIONI

Il metodo di esaustione è in questo modo interpretato in chiave moderna. Nell'antichità – ricordiamoci che questo procedimento era stato sviluppato soprattutto in campo geometrico – all'idea di limite di due successioni convergenti, si preferiva l'idea analoga di limite da "riempire" con grandezze note.

Ad esempio l'area del segmento parabolico viene calcolata da Archimede "riempiendolo" letteralmente con dei triangoli sempre più piccoli, fino ad "esaurire" (da cui il nome del metodo) lo spazio a disposizione.

È da notare inoltre che una delle due successioni, quella maggiorante, solitamente, si trasformerà col tempo in una pura verifica della correttezza dei teoremi proposti, perdendo quasi del tutto il suo valore pratico.

Nei casi geometrici, Archimede ne parla chiaramente nel *Metodo*, si considera la figura come piena di tutti i suoi elementi infinitesimali, trovati segando la stessa con piani paralleli, e pertanto scomponibile. Si lavora, in questo caso, su serie e successioni di poligoni noti per arrivare al teorema finale.

In termini moderni il metodo di esaustione viene ancora utilizzato nel calcolo integrale, anche se oggigiorno non lo si chiama più «metodo di esaustione di Eudosso», ma più semplicemente «calcolo dell'integrale semplice». In effetti lo spostamento del campo d'azione del calcolo infinitesimale dalla geometria all'analisi di funzioni ha da un lato arricchito in precisione e rapidità il metodo, ma d'altro canto lo ha impoverito di utilità perché per calcolare l'area di una figura si può ancora utilizzare il calcolo integrale, ma è molto meglio lavorare con formule più rapide già dimostrate, anche se sono state trovate (ad esempio l'area del cerchio) con quello che un tempo era il metodo di esaustione.

Eudosso, più di 2000 anni fa, fu il primo a sviluppare un calcolo che può definirsi la chiave dell'analisi infinitesimale moderna.

Capitolo 4

La misura del cerchio

Come abbiamo detto sia nell'introduzione che nella biografia, Archimede perfezionò e divulgò il metodo di esaustione di Eudosso che abbiamo esposto nel capitolo precedente. Ora porremo al centro della nostra attenzione un problema di natura geometrica, ma che spazia ampiamente nella matematica pura, anticipando addirittura il bisogno di definire numeri non solo irrazionali, ma trascendenti. Questo problema è la determinazione del valore dell'area del cerchio.

Prima di esporre il metodo utilizzato da Archimede nel suo *Misura del cerchio*, dobbiamo capire come si presentava all'epoca il problema. Il risultato che si voleva raggiungere non era esattamente l'area del cerchio; più che altro si mirava alla soluzione del problema della famosa «quadratura del cerchio». Archimede troverà l'area del cerchio non direttamente, ma a partire da considerazioni volte a rendere possibile la costruzione del quadrato di area uguale al circolo considerato. Perciò esporremo ora i procedimenti di quadratura noti ai matematici del III secolo a.C., riassumendoli nel processo di quadratura delle cosiddette «lunule di Ippocrate», altro grande matematico che, risolvendo questo problema, mantenne viva la speranza di poter un giorno riuscire nella «massima quadratura».

La quadratura del cerchio

Il concetto di quadratura

Riuscire a quadrare il cerchio è stato un chiodo fisso dei matematici dai tempi di Anassagora (500-420 a.C.) sino al 1882, quando Ferdinand Lindemann (1852-1939) dimostrò definitivamente l'impossibilità del problema. Questo non ci ha comunque lasciato a bocca asciutta perché, come avremo modo di vedere, i tentativi di quadrare il cerchio hanno dato origine non solo alle moderne formule per calcolarne l'area, ma anche a quello che oggi chiamiamo calcolo infinitesimale.

È d'obbligo, prima d'iniziare le nostre considerazioni sul lavoro degli antichi, chiarire il concetto di «quadratura». «Quadrare una figura», così come era inteso dagli antichi, significa costruire un quadrato di area uguale a quella della figura piana considerata. Se ciò è realmente possibile, allora si dice che la figura è «quadrabile».

Il problema delle quadrature nacque in Grecia nel V secolo a.C., durante l'età d'oro di Atene e delle altre Polis greche. Gli antichi ellenici erano affascinati dalla simmetria e dalla perfezione della semplicità; in particolare si stupivano di come fosse possibile che «il semplice generasse il complesso, il quale poi potesse essere riportato al semplice». Questa «ricerca della semplicità e dell'essenziale», che si ritrova sempre in fondo anche alle teorie più difficili da comprendere, sta all'origine del nostro problema. In effetti, le quadrature appaiono come tentativi di trasformare figure anche complesse in altre vieppiù semplici, sino a giungere alla figura semplice e perfetta per eccellenza: il quadrato.

Semplicità, dunque, ma anche precisione. Tutto ciò può essere riassunto dalla concezione di «costruzione». Questo termine descriveva non solo un mero procedimento matematico, ma anche uno stile di lavoro. Per costruire una figura potevano essere usati solo (semplicità) una riga non graduata ed un compasso, erano vietati altri strumenti. Non bisogna però confondere la semplicità con l'imprecisione: i matematici greci erano divenuti talmente abili con i loro strumenti da aver raggiunto traguardi eccezionali. Per esempio, alcuni riuscivano a quadrare qualsiasi poligono seppur contorto o irregolare, mentre altri si cimentavano in rappresentazioni al limite delle possibilità grafiche.

La sfida più grande era comunque sempre la quadratura del cerchio. Molti tentarono, ma invano; di alcuni, come Ippocrate di Chio, Euclide e Archimede, ci sono giunte opere che racchiudono i loro studi, di altri non sappiamo nulla, se non che hanno affrontato la questione. Molte, infine, sono le notizie di risultati positivi che però celano grossolani errori o imprecisioni, forse dovute ai trascrittori medioevali, lungi dall'essere alla pari degli autori dei libri che copiavano.

Per quadrare le figure gli antichi greci lavoravano per "gradini": passavano dalla figura più complessa ad una più semplice utilizzando metodi fissi e dimostrati (v. Allegato 2). Così iniziarono col quadrare il rettangolo, poi il triangolo e poi il poligono generico; e ogni quadratura faceva riferimento a quella precedente. Ad esempio, per quadrare un triangolo si costruiva un rettangolo avente la stessa area, per poi costruire il quadrato; per quadrare un poligono lo si divideva il triangoli che venivano quadrati separatamente, per poi sommare le aree ottenute in un unico quadrato; e così via.

I primi tentativi: le lunule di Ippocrate di Chio

Se quadrare un poligono non era facile, quadrare figure curvilinee sembrava impossibile. Come abbiamo visto, la vera sfida per i geometri dell'antichità, abilissimi con le figure rettilinee, erano le quadrature di figure con linee curve; in particolare il cerchio, la figura curvilinea per eccellenza.

Nel 440 a.C. circa, Ippocrate di Chio, servendosi solo di tre teoremi fondamentali, quadrò una particolare lunula attentamente costruita. La lunula è una particolare figura ottenuta dalla sovrapposizione di due circonferenze, le quali generano una "mezzaluna", chiamata per l'appunto lunula. Di lunule quadrabili ne esistono solo cinque tipi, Ippocrate ne scoprì tre, mentre le altre due vennero scoperte dal grande Eulero più di un millennio dopo.

Ecco la soluzione della quadratura delle lunule di Ippocrate; facciamo notare che lo schema descritto vale anche per i poligoni, essendo, come detto, fisso e dimostrato.

Teoremi preliminari

– *Teorema di Pitagora*: la somma delle aree dei quadrati costruiti sui cateti di un triangolo rettangolo è uguale all'area del quadrato costruito sull'ipotenusa dello stesso triangolo.
– Ogni angolo inscritto in una semicirconferenza è retto.
– *Euclide*, *Elementi*, *Proposizione XII.2*: «le aree di due cerchi o di due semicerchi stanno tra di loro come i quadrati dei loro diametri».

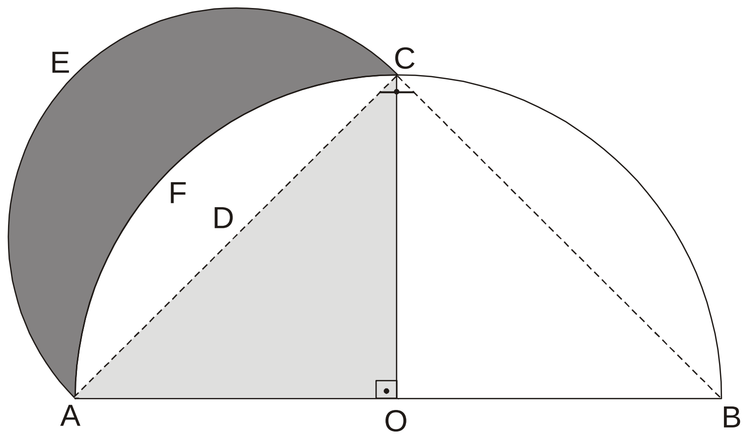


Figura 4.1

Riferiamoci alla figura 4.1.

Teorema. La lunula AEFC è quadrabile.
Dimostrazione. L'angolo ACB è retto, perché inscritto in una semicirconferenza. I triangoli AOC e BOC sono uguali, perché hanno uguali due lati e l'angolo compreso, perciò |AC| = |BC|.
Per il teorema di Pitagora

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2 = |AC|^2 + |AC|^2 = 2|AC|^2$$

Applichiamo il terzo dei teoremi riportati in precedenza ai due semicerchi.

$$\frac{\text{area (AEC)}}{\text{area (ACB)}} = \frac{|AC|^2}{|AB|^2} = \frac{|AC|^2}{2|AC|^2} = \frac{1}{2}$$

Quindi l'area del semicerchio AEC misura la metà dell'area del semicerchio ACB.
Ora, il quadrante AFCO (quarto di cerchio) ha anch'esso area pari alla metà di quella del semicerchio ACB. Perciò ha area uguale al semicerchio AEC

$$\text{area}(\text{AFCO}) = \frac{1}{2}\text{area}(\text{ACB}) = \text{area}(\text{AEC})$$

La lunula AECF differisce dall'area di AEC per il valore dell'area della regione ADFC. Ciò vale anche per il quadrante AFCO. Quindi

$$\text{area(AEC)} = \text{area(AFCO)}$$

$$\text{area(AEC)} - \text{area(AFCD)} = \text{area(AFCO)} - \text{area(AFCD)}$$

$$\text{area(AECF)} = \text{area(ACO)}$$

perciò l'area della lunula è uguale a quella del triangolo ACO. Ora si può quadrare semplicemente il triangolo nel modo seguente.
(I metodi di quadratura del triangolo e del rettangolo sono riportati negli allegati)

Quadratura del triangolo e del rettangolo

Riferendoci alla figura 4.2, consideriamo il triangolo ACO. Prendiamo l'altezza, il cateto |OC| e troviamo il suo punto medio, F. Il segmento |OF| sarà un lato del rettangolo che intendiamo costruire. Trasportiamo la misura del cateto |AO| in modo da disegnare il segmento |OH|, di pari lunghezza, sul prolungamento di |AO|. |OH| sarà la base del nostro rettangolo con area uguale ad ACO e pertanto anche uguale alla lunula.

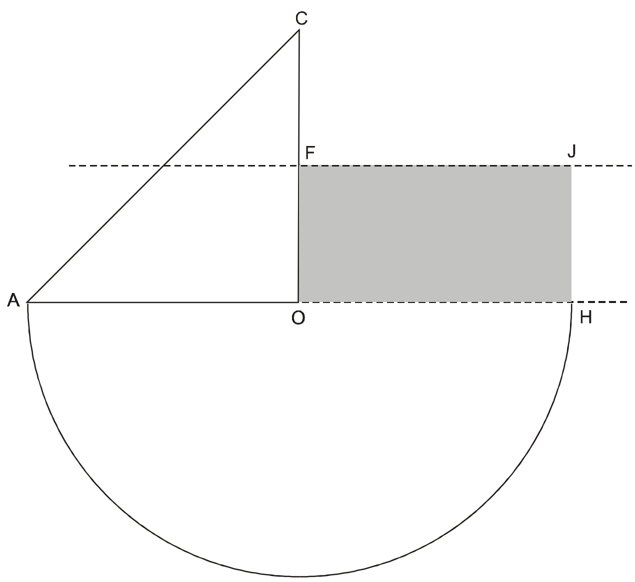


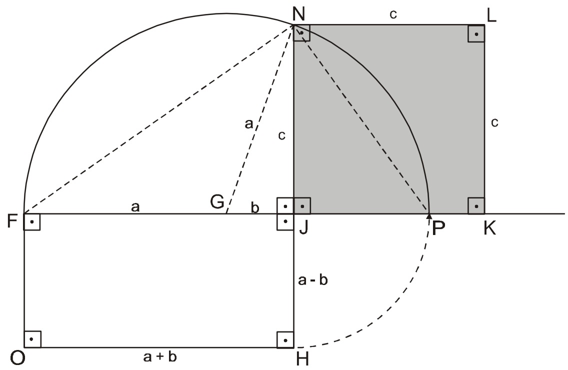
Figura 4.2

Ora possiamo finalmente costruire il quadrato di area uguale alla nostra lunula AECF.

Quadratura del rettangolo

Riferendoci alla figura 4.3, consideriamo il rettangolo OHJF. Prolunghiamo il lato [JF] a piacere e riportiamoci la misura del lato |HJ|, chiamiamo P il punto così localizzato. Consideriamo il segmento [FP], troviamo il suo punto medio G e disegnamo una semicirconferenza con centro in esso. Prolunghiamo ora il lato [HJ] verso l'alto finché non intersecherà la semicirconferenza nel punto che chiameremo N. Il segmento ottenuto [JN] è il lato del quadrato che facilmente si può ora costruire.

Figura 4.3



Dimostriamo che il rettangolo OHJF ha la stessa area del quadrato JKLN. Consideriamo il triangolo rettangolo GJN, chiameremo, per alleggerire la sintassi, con a i raggi della semicirconferenza con centro in G, con b il cateto |GJ| e con c i lati del quadrato costruito JKLN.
Per alleggerire la scrittura poniamo

$a = |FG| = |GP| = |GN|$

$b = |GJ|$

$c = |JN| = |JK| = |KL| = |LN|$

Inoltre

$|JP| = |HJ| = |GP| - |GJ| = a - b$

$|FJ| = |FG| + |GJ| = a + b$

il triangolo FNP è rettangolo in N ed è simile ai triangoli FJN e NJP, entrambi rettangoli in J. Perciò

$$\frac{|FJ|}{|NJ|} = \frac{|NJ|}{|JP|}$$

$$\frac{a+b}{c} = \frac{c}{a-b}$$

$$(a+b)(a-b) = c^2$$

$$a^2 - b^2 = c^2$$

$$\text{area}(OHJF) = \text{area}(JKLN)$$

Questa è anche un'elegante dimostrazione del teorema di Pitagora.
Abbiamo dimostrato che il quadrato JKLN ha la stessa area del rettangolo FOHJ, il quale ha la stessa area del triangolo AOC, che ha la stessa area della lunula AECF. Perciò possiamo dire che il quadrato JKLN che abbiamo costruito ha la stessa area della lunula AECF, perciò quest'ultima può essere quadrata, seguendo il metodo che abbiamo utilizzato, noi e Ippocrate di Chio più di 2000 anni or sono.

La misura del cerchio

I greci, come abbiamo visto, riuscivano a quadrare non solo triangoli e rettangoli, ma anche poligoni per quanto bizzarri potessero essere. Questo procedimento è l'anello di congiunzione tra il lavoro di matematici come Ippocrate e quello di quelli come Eudosso. Il metodo di esaustione (v. capitolo 3) si propone di "riempire" una superficie di area sconosciuta, con figure note delle quali possiamo calcolare l'area. Per quadrare i poligoni si fa proprio questo: dato un poligono, lo si divide in tanti triangoli, quindi in figure quadrabili direttamente, senza passaggi intermedi. Una volta diviso il poligono si procede a quadrare singolarmente i triangoli ottenuti e a sommare le aree dei quadrati che risultano, ottenendo un unico quadrato di area uguale al poligono iniziale. Per meglio comprendere questi procedimenti li abbiamo riportati nell'allegato 2.

Archimede si spinse oltre. Il suo obbiettivo in *Misura del cerchio* era calcolare l'area del cerchio e lo fece costruendo dei poligoni inscritti e circoscritti, quindi quadrabili come abbiamo riportato.

Le conoscenze dei greci

Facciamo il punto della situazione. Euclide, nei suoi onnipresenti *Elementi*, riporta informazioni riguardanti il cerchio e le sue proprietà. Esse costituiscono la base delle conoscenze su questa figura nell'antichità. Citiamo alcune di queste informazioni, tali da aiutarci a capire quale fosse il livello che avevano raggiunto i matematici greci dell'antichità.

Sapevano che, dato un qualsiasi cerchio, il rapporto tra la circonferenza ed il diametro è sempre costante. Conoscevano cioè la relazione

$$\frac{C_1}{D_1} = \frac{C_2}{D_2}$$

dove C sono le circonferenze dei cerchi 1 e 2, e D i relativi diametri.

Il «rapporto costante» che viene citato altro non è che un numero che sarebbe passato alla storia come un ostacolo insormontabile per la risoluzione del problema di quadrare il cerchio. La costante che esprime il rapporto tra una qualsiasi circonferenza e il suo diametro è oggi nota come π. La formula precedente assume oggi questa espressione:

$$\frac{C_1}{D_1} = \pi = \frac{C_2}{D_2} \text{ o quella equivalente di } C = \pi \cdot D$$

ma dato che il diametro D vale due volte il raggio r, ecco come appare comunemente, e come tutti noi l'abbiamo sempre vista:

$$C = 2 \cdot r \cdot \pi$$

Per quanto riguarda l'area del cerchio, Euclide ci dice che due aree circolari stanno tra loro come i quadrati dei rispettivi diametri (*Elementi*, Proposizione XII.2), perciò il rapporto tra l'area del cerchio e il quadrato del suo diametro è ancora costante, ma non vale più π. In termini moderni possiamo scrivere

$$\frac{A}{D^2} = \kappa \text{ o, in modo equivalente } A = D^2 \cdot \kappa$$

I problemi iniziarono a sorgere quando si cercò di mettere in relazione le due costanti. Cosa non facile: che rapporto c'era tra una costante unidimensionale, π, e l'altra bidimensionale, κ?

Trovare questa relazione avrebbe significato anche mettere in riferimento Area e Circonferenza, di cui è indubbia la comodità. Archimede fece anche questo ed ora vedremo come.

Dal libro di Archimede

Intorno al 225 a.C., Archimede scrisse un trattato: *Misura del cerchio*. Nel quale troviamo la formula che mette in relazione area del cerchio e misura della circonferenza e che fornì l'illusione, purtroppo restata tale, che la soluzione della quadratura del cerchio fosse possibile e, soprattutto, vicina.

Per dimostrare le sue teorie il sommo siracusano si avvalse di un metodo di dimostrazione semplice da realizzare quanto difficile da escogitare: la «doppia riduzione all'assurdo», che vedremo in dettaglio.

Esaminiamo ora il lavoro dello scienziato dell'antichità tenendo ben presente quale fu il problema che lo portò a questi ragionamenti e quale meravigliosa soluzione seppe trovare, non certo per la quadratura, ma per la *Misura del cerchio*.

Riporteremo il procedimento utilizzato da Archimede, al termine del quale seguirà la dimostrazione tramite procedimenti in termini più moderni, allo scopo di facilitare la comprensione, chiarire eventuali dubbi e dimostrare che il genio di un uomo, seppur limitato dalle tecniche scientifiche dell'epoca, è riuscito ad anticipare di diciotto secoli la nascita del calcolo infinitesimale e dei suoi concetti fondamentali.

Dal libro di Archimede: *La misura del cerchio*

Problema. Si determini l'area di un poligono regolare con centro in O, perimetro Q, e apotema h, in cui l'apotema è il segmento passante da O, perpendicolare ad uno qualsiasi dei lati.

Teorema. L'area del poligono regolare è $\frac{1}{2} \cdot h \cdot Q$.

Dimostrazione. Supponiamo che il poligono abbia *n* lati, ognuno di quali misuri b. Tracciamo dei segmenti che congiungano il punto O con ciascun vertice del poligono, in modo da suddividerlo in *n* triangoli uguali, ognuno dei quali abbia come altezza l'apotema h e come base un lato b.

Ogni triangolo ha area $A_T = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$.

Il poligono ha quindi area $A_P = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h + \frac{1}{2} \cdot b \cdot h + ... + \frac{1}{2} \cdot b \cdot h = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (\sum_1^n b) = \frac{1}{2} \cdot h \cdot Q$,

dato che $\sum_1^n b$ è il perimetro Q del poligono.

Era già noto ai tempi di Archimede che data una circonferenza è sempre possibile inscrivervi un quadrato (Euclide, *Elementi*, Proposizione IV.6); l'area del quadrato sarà minore di quella del cerchio in cui è inscritto, ovviamente. Se dividiamo gli archi di circonferenza relativi ai lati del quadrato nei loro punti medi, determiniamo i vertici di un ottagono regolare, la cui area differisce sempre dal cerchio, ma di un valore minore rispetto al quadrato. Continuando a costruire poligoni con un numero sempre maggiore di lati si approssimerà con sempre maggiore precisione l'area del cerchio. Il processo può continuare all'infinito, ma l'area del poligono inscritto, seppur di poco, differirà sempre da quella del cerchio per un valore sempre più piccolo.

È questo il concetto basilare del metodo di esaustione di Eudosso (v. Capitolo 3). Quindi, data un'area (che chiameremo ε), per piccola che essa sia, si potrà sempre costruire un poligono inscritto ad un cerchio tale che la differenza tra le aree delle due figure sia sempre minore dell'area ε. Con questo sistema è quindi possibile avvicinarsi quanto si voglia all'area del cerchio, senza mai però raggiungerla. In termini moderni diremmo che l'area del cerchio è il limite della successione delle aree dei poligoni. È forse una forzatura pensare che anche Archimede concepisse l'area del cerchio come limite di questa successione, ma il concetto che egli esprime nel suo scritto è questo.

Scriveremo dunque

$$\text{Area del poligono} \xrightarrow{\text{lati}\to\infty} \text{Area del cerchio}$$

$$\text{Area del cerchio - Area del poligono} < \varepsilon$$

Questo vale sia per i poligoni inscritti sia per quelli circoscritti.

In questo modo si ottiene un'approssimazione dell'area del cerchio, ma Archimede non puntava a questo. Egli si limitava ad osservare che se è possibile costruire un poligono la cui area si avvicini quanto si vuole a quella del cerchio, sarà anche possibile quadrare questo poligono, quindi è plausibile pensare – a torto – che probabilmente si potrà quadrare anche il cerchio. Archimede ci dimostra questo nelle Proposizioni seguenti di *Misura del cerchio*.

Proposizione 2. L'area di qualsiasi cerchio è uguale a quella di un triangolo rettangolo avente uno dei cateti uguale al raggio e l'altro uguale alla circonferenza.
Dimostrazione. Consideriamo due figure: una circonferenza con centro in O, raggio r e misura della circonferenza C; e un triangolo rettangolo con base C e altezza r. Si indichi con A l'area del cerchio e con T quella del triangolo. L'area del triangolo è facilmente calcolabile

$$T = \frac{1}{2} \cdot r \cdot C$$

La proposizione afferma che A = T. Per dimostrarlo utilizziamo la doppia riduzione all'assurdo, diciamo che è possibile solo uno dei casi seguenti:

1. $A > T$
2. $A < T$
3. $A = T$

Ipotesi 1. Supponiamo che $A > T$
Ciò significa che l'aera del cerchio supera di una certa quantità positiva l'area del triangolo. Cioè

$$A - T > 0$$

Prendiamo questa grandezza come ε e applichiamo ciò che abbiamo dimostrato in precedenza

$$\text{Area del cerchio} - \text{Area del poligono inscritto} < \varepsilon$$

$$A - \text{Area del poligono inscritto} < A - T$$

$$T < \text{Area del poligono inscritto}$$

Il poligono inscritto nella circonferenza ha però, proprio perché inscritto, perimetro Q minore della circonferenza C, e apotema h minore del raggio r. Perciò

$$\text{Area del poligono inscritto} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot Q < \frac{1}{2} \cdot r \cdot C = T$$

$$\text{Area del poligono inscritto} < T$$

E qui arriviamo ad una contraddizione: supponendo vera l'ipotesi 1 avremmo

$$T < \text{Area del poligono inscritto} < T$$

Perciò l'ipotesi 1 è da considerarsi *falsa*.

Ipotesi 2. Supponiamo che $A < T$
Come nel caso precedente consideriamo la differenza tra le due aree. Stavolta otteniamo, per ipotesi, che la differenza positiva è tra l'area T, maggiore, e quella A, minore.

$$T - A > 0$$

Quanto considerato per i poligoni inscritti, vale anche per quelli circoscritti, ovviamente. Pertanto è sempre possibile costruire un poligono circoscritto ad una circonferenza, tale che la sua area si avvicini quanto si voglia a quella del cerchio al quale è circoscritto. Perciò si può scrivere

$$\text{Area del poligono circoscritto - Area del cerchio} < \varepsilon$$

Assumiamo come valore di ε $T - A > 0$. Otterremo che

$$\text{Area del poligono circoscritto} - A < T - A$$

$$\text{Area del poligono circoscritto} < T$$

Ora, il poligono circoscritto ha l'apotema h di valore uguale al raggio r del cerchio, e il perimetro Q maggiore della circonferenza C. Quindi si può scrivere

$$\text{Area del poligono circoscritto} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot Q > \frac{1}{2} \cdot r \cdot C = T$$

$$\text{Area del poligono circoscritto} > T$$

Ecco nuovamente la contraddizione: supponendo vera l'ipotesi 2 avremmo

$$T < \text{Area del poligono circoscritto} < T$$

Perciò anche l'ipotesi 2 è da considerarsi *falsa*.

Conclusione. Possiamo affermare con certezza che effettivamente l'area del cerchio è uguale a quella del triangolo rettangolo avente un cateto di lunghezza pari alla circonferenza ed un altro pari al raggio del cerchio. Perchè, citando Archimede:

> «Poiché l'area del cerchio non è né maggiore né minore [dell'area del triangolo], è uguale ad essa».

Il procedimento in termini moderni

Il sistema adottato da Archimede, al di là della controversa dimostrazione, fu quello di considerare l'area e la circonferenza del cerchio come i limiti delle successioni delle aree, rispettivamente dei perimetri, di poligoni regolari inscritti e circoscritti al circolo. Il concetto di «cerchio come limite di successioni di poligoni inscritti e circoscritti ad esso» fu attribuito a Democrito, filosofo greco del V secolo a.C., ma trovò il successo nella dimostrazione di Archimede che abbiamo riportato.

Nel trattato *Misura del cerchio* non si trovano spiegazioni riguardanti le relazioni che il siracusano ha utilizzato, ma solo le dimostrazioni dei risultati. È inoltre necessario chiarire che in Archimede non troviamo tracce di relazioni trigonometriche; anche se si attribuisce ai greci la paternità di questa branca della matematica, non troviamo alcuna applicazione di questo tipo nelle soluzioni citate. Ripeteremo quindi i ragionamenti del problema senza l'ausilio di considerazioni basate su seni, coseni o tangenti; lavoreremo solo con le conoscenze geometriche che si avevano nell'epoca di Euclide e Pitagora. È però interessante notare come oggi sia possibile analizzare il problema mediante relazioni trigonometriche. Le successioni che vengono costruite appaiono di difficile interpretazione, ma è possibile, mediante un calcolatore, elaborarle. Anche con questo metodo troviamo la soluzione di Archimede dell'area del cerchio.

Poligoni inscritti

Il nostro scopo è approssimare i valori dell'area e della circonferenza del cerchio. Come rappresentato nella figura 4.4, in un cerchio generico, centrato in O e con raggio r, inscriviamo un quadrato; esso approssimerà le misure che stiamo cercando anche se con un margine di errore rilevante. Perciò costruiremo dei poligoni regolari, partendo dal nostro quadrato, mediante i quali ridurremo le differenze di misura con il cerchio ad un valore sempre più piccolo. In altre parole dobbiamo costruire una successione numerica di aree e perimetri dei poligoni inscritti aventi 2^n lati, a partire dal quadrato.

È necessario dire che, per qualunque poligono inscritto, l'area e il perimetro del cerchio saranno sempre maggiori di quelli dei poligoni, qualunque numero di lati essi abbiano; quindi è impossibile ridurre a zero il difetto tra le grandezze. Possiamo però avvicinarci molto ad esso, quanto basta per considerare "praticamente" uguali le aree delle due figure. Possiamo quindi dire che l'area del cerchio è il limite a cui tende la successione delle aree dei poligoni, mentre la misura della circonferenza è il limite a cui tende la successione dei perimetri dei poligoni.

Continuiamo a ragionare con le aree delle figure, poiché i valori che troveremo ci serviranno anche per calcolare i perimetri.

Per trovare l'area di un poligono, bisogna conoscere le misure del lato e dell'apotema (v. *Misura del cerchio*, Teorema [iniziale]).
Iniziamo con il lato. Riferendoci alla figura 4.4, chiameremo con a_n la misura del lato del quadrato; con a_{n+1} la misura del lato [AB] dell'ottagono, che è il poligono successivo al quadrato; con t l'apotema dell'ottagono; e con C il punto medio di un lato del quadrato. Le considerazioni che faremo saranno specifiche del quadrato e dell'ottagono, ma i risultati possono essere estesi a tutti i poligoni che compongono la nostra successione.

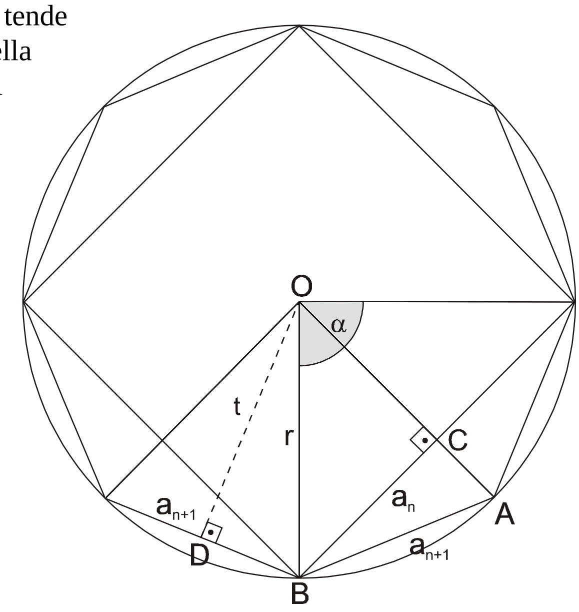


Figura 4.4

Applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo OCB, rettangolo in C, dove OB è il raggio della circonferenza

$$|OC|^2 = |OB|^2 - |CB|^2$$

$$|OC| = \sqrt{r^2 - \left(\frac{a_n}{2}\right)^2}$$

$$|OC| = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - a_n^2}$$

essendo $|OA| = r$, abbiamo

$$|CA| = |OA| - |OC| = r - \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - a_n^2}.$$

$|AB|$, a_{n+1}, è la misura del lato dell'ottagono successivo al quadrato. Sfruttiamo ancora il teorema di Pitagora, ma stavolta sul triangolo CAB, rettangolo ancora in C, punto medio del lato del quadrato.

Dato che nel nostro caso la bisettrice dell'angolo α divide il lato in due metà $|CB| = \frac{a_n}{2}$ otteniamo:

$$|AB|^2 = |CA|^2 + |CB|^2$$

$$|AB| = \sqrt{\left(r - \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - a_n^2}\right)^2 + \left(\frac{a_n}{2}\right)^2}$$

$$|AB| = \sqrt{r^2 - r\sqrt{4r^2 - a_n^2} + r^2 - \frac{1}{4}a_n^2 + \frac{1}{4}a_n^2}$$

$$a_{n+1} = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - a_n^2}}$$

In questo modo abbiamo trovato il lato generico di un qualsiasi poligono inscritto.

Passiamo ora all'apotema t. Chiamiamo D il punto di intersezione dell'apotema t con il lato dell'ottagono. L'angolo in questo punto è retto; poiché $|AO| = |BO| = r$ il triangolo BAO è isoscele, ma essendo t la sua altezza e a_{n+1} la base relativa, D è il punto medio del lato dell'ottagono.

Applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo DBO, rettangolo in D. Troveremo che t vale

$$t^2 = |BO|^2 - |BA|^2$$

$$t = \sqrt{r^2 - \left(\frac{a_n}{2}\right)^2}$$

$$t = \sqrt{r^2 - \frac{a_n^2}{4}}$$

Abbiamo trovato tutti i valori necessari per poter calcolare area e perimetro di un qualsiasi poligono appartenente alla successione: la misura del lato e quella dell'apotema.

Bisogna però considerare che abbiamo due formule ricorsive sia per entrambi, dobbiamo quindi fornire dei dati iniziali. Per i poligoni inscritti il primo termine a_0 è

$$a_0 = \sqrt{r^2 + r^2} = \sqrt{2r^2} = r \cdot \sqrt{2}$$

Poligoni circoscritti

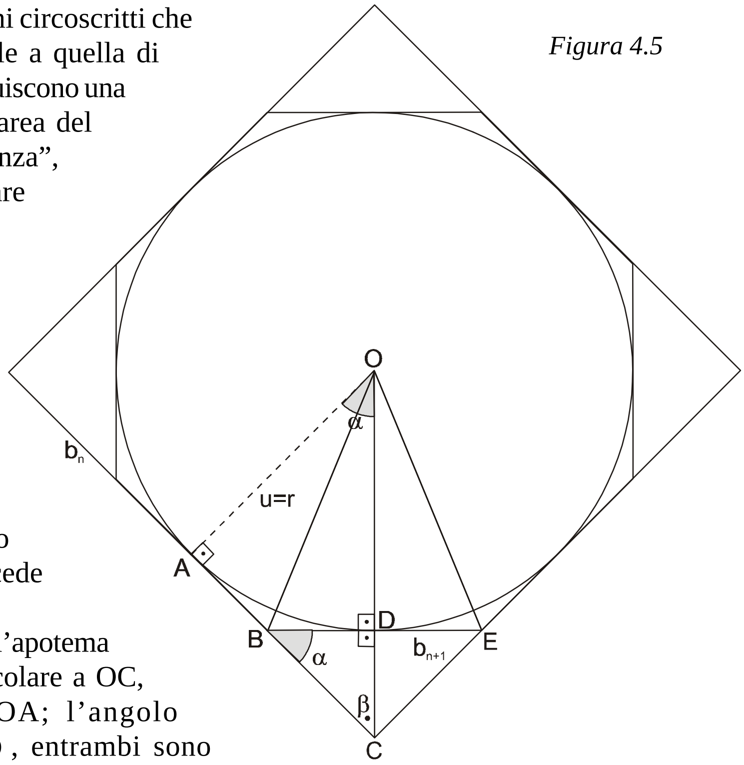


Figura 4.5

Passiamo ora alla successione di poligoni circoscritti che dovrebbe comportarsi in maniera simile a quella di quelli inscritti. Mentre questi ultimi costruiscono una successione crescente verso il limite “area del cerchio” o, rispettivamente, “circonferenza”, i poligoni circoscritti dovrebbero generare una successione decrescente verso lo stesso limite. Per verificare la nostra ipotesi partiamo, analogamente a quanto abbiamo fatto in precedenza, da un quadrato di lato b_n stavolta circoscritto al cerchio. Il quadrato sarà tangente alla circonferenza nei punti medi dei suoi lati. Prendiamo uno di questi punti, che chiameremo A, che sarà il punto medio di un lato dell’ottagono che succede al quadrato.

Riferendoci alla figura 4.5, notiamo che: l’apotema u è uguale al raggio r; BD è perpendicolare a OC, mentre AC è perpendicolare ad OA; l’angolo $\alpha = \angle AOC$ si trova anche in $\angle CBD$, entrambi sono complementari all’angolo $\beta = \angle OCA$. I triangoli OAC e BDC sono quindi simili.

La circonferenza passa per i punti A e D, perciò i segmenti [OA] e [OD] sono uguali al raggio r, e quindi anche fra di loro. Noi vogliamo conoscere il lato b_{n+1} dell’ottagono, perciò ci serve il lato [DC]. Per ottenerlo applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo OAC, rettangolo in A.

$$|OC|^2 = |OA|^2 + |AC|^2$$

$$|OC| = \sqrt{r^2 + \left(\frac{b_n}{2}\right)^2}$$

$$|OC| = \sqrt{r^2 + \frac{b_n^2}{4}}$$

Sottraiamo $|OD| = r$ da $|OC|$ ed otterremo che

$$|CD| = \sqrt{r^2 + \frac{{b_n}^2}{4}} - r$$

Il segmento $|BC|$, invece, è la differenza tra $|AC|$ e $|AB|$, rispettivamente le metà di b_n e b_{n+1}, quindi

$$|BC| = |AC| - |AB| = \frac{b_n}{2} - \frac{b_{n+1}}{2} = \frac{b_n - b_{n+1}}{2}$$

Dato che i triangoli OAC e BDC sono simili, possiamo usare il seguente rapporto:

$$\frac{|BC|}{|OC|}=\frac{|CD|}{|AC|}$$

$$\frac{\frac{1}{2}\left(b_n-b_{n+1}\right)}{\sqrt{r^2+\left(\frac{b_n}{2}\right)^2}}=\frac{\sqrt{r^2+\left(\frac{b_n}{2}\right)^2}-r}{\frac{b_n}{2}}$$

$$\frac{b_n^2}{4}-\frac{b_nb_{n+1}}{4}=r^2+\frac{b_n^2}{4}-r\sqrt{r^2+\left(\frac{b_n}{2}\right)^2}$$

$$\frac{b_n}{4}\cdot b_{n+1}=r\sqrt{r^2+\left(\frac{b_n}{2}\right)^2}-r^2$$

$$b_{n+1}=\frac{4\cdot\left(r\sqrt{r^2+\frac{b_n^2}{4}}-r^2\right)}{b_n}$$

L'apotema di un qualunque poligono circoscritto ad una circonferenza equivale al raggio della stessa, mentre nel caso della nostra successione abbiamo quale elemento di partenza il lato del quadrato, che misura

$$b_0=2\cdot r$$

Ora disponiamo degli elementi necessari per continuare la nostra analisi del processo adottato da Archimede.

L'approssimazione del cerchio

Il prossimo passo è calcolare l'area di un cerchio tramite il passaggio al limite delle due successioni. Per facilitare il nostro lavoro, ci occuperemo ora di un cerchio particolare, avente raggio r = 1, in modo da ottenere valori facilmente comprensibili ai fini del nostro studio.
In seguito mostreremo attraverso quale relazione Archimede sia riuscito a dimostrare che l'area del cerchio è equivalente a quella di un triangolo rettangolo avente un cateto pari al raggio e l'altro alla circonferenza del cerchio considerato.
Consideriamo il nostro cerchio di raggio unitario e modifichiamo di conseguenza le formule:

$$a_n:\begin{cases}a_0=\sqrt{2}\\ a_{n+1}=\sqrt{2-\sqrt{4-a_n^2}}\end{cases}\quad\wedge\quad b_n:\begin{cases}b_0=2\\ b_{n+1}=\dfrac{2\sqrt{4+b_n^2}-4}{b_n}\end{cases}$$

Nella tabella 4.1 sono riportati i valori di a_{n+1} e b_{n+1} per i primi 25 termini di n, fino a un poligono di 67’108’864 lati.

Numero di lati dei poligoni (2^{n+2})	**Misura lato poligono inscritto (a_n)**	**Misura lato poligono circoscritto (b_n)**
4	1.4142135624	2.0000000000
8	0.7653668647	0.8284271247
16	0.3901806440	0.3978247348
32	0.1960342807	0.1969828067
64	0.0981353487	0.0982536995
128	0.0490824570	0.0490972442
256	0.0245430766	0.0245449248
512	0.0122717693	0.0122720003
1024	0.0061359135	0.0061359424
2048	0.0030679604	0.0030679640
4096	0.0015339806	0.0015339811
8192	0.0007669904	0.0007669904
16384	0.0003834952	0.0003834952
32768	0.0001917476	0.0001917476
65536	0.0000958738	0.0000958738
131072	0.0000479369	0.0000479369
262144	0.0000239685	0.0000239684
524288	0.0000119842	0.0000119842
1048576	0.0000059921	0.0000059921
2097152	0.0000029961	0.0000029961
4194304	0.0000014980	0.0000014980
8388608	0.0000007489	0.0000007489
16777216	0.0000003746	0.0000003748
33554432	0.0000001873	0.0000001872
67108864	0.0000000942	0.0000000949

Tabella 4.1: elementi delle successioni a_n e b_n di un cerchio di raggio 1.

Conoscendo i valori del lato e dell’apotema è possibile calcolare sia il valore del perimetro che dell’area del poligono al quale appartengono, come riportato nella tabella 4.2 (quando l’apotema assume il valore di 1 i valori assunti dalle successioni vengono falsati a causa dell’approssimazione).

Apotema poligono inscritto	**Perimetro poligono inscritto**	**Area poligono iscritto**	**Perimetro poligono circoscritto**	**Area poligono circoscritto**
0.7071067812	5.6568542495	2.0000000000	8.0000000000	4. 0000000000
0.9238795325	6.1229349178	2.8284271247	6.6274169980	3.3137084990
0.9807852804	6.2428903045	3.0614674589	6.3651957561	3.1825978781
0.9951847267	6.2730969811	3.1214451523	6.3034498149	3.1517249074
0.9975909124	6.2806623139	3.1365484905	6.2882367705	3.1441183852
0.9987954562	6.2825545019	3.1403311570	6.2844472599	3.1422236299
0.9996988187	6.2830276023	3.1412772509	6.2835007383	3.1417503692
0.9999247018	6.2831458807	3.1415138011	6.2832641614	3.1416320807
0.9999811753	6.2831754506	3.1415729404	6.2832050205	3.1416025102
0.9999952938	6.2831828430	3.1415877253	6.2831902354	3.1415951177
0.9999988235	6.2831846912	3.1415914216	6.2831865393	3.1415932696
0.9999997059	6.2831851531	3.1415923455	6.2831856168	3.1415928084
0.9999999265	6.2831852669	3.1415925757	6.2831853819	3.1415926910
0.9999999816	6.2831853096	3.1415926404	6.2831853511	3.1415926756
0.9999999954	6.2831852906	3.1415926417	6.2831853819	3.1415926910
0.9999999989	6.2831852148	3.1415926065	6.2831850476	3.1415925238
0.9999999997	6.2831858219	3.1415929107	6.2831817392	3.1415908696
0.9999999999	6.2831833934	3.1415916966	6.2831850476	3.1415925238

Tabella 4.2: aree e perimetri dei poligoni inscritti e circoscritti al cerchio di raggio 1.

Osserviamo che le entrambe le successioni costruite per le aree convergono a 3,141593; un valore molto prossimo a quello moderno di π.
Le successioni dei perimetri, invece, tendono ad un valore prossimo al doppio del valore di π.

La circonferenza

I risultati che abbiamo ottenuto non sono altro che la verifica sperimentale della teoria dei greci sulla misura della circonferenza, che era ritenuta in rapporto costante con il suo diametro. Essendo il diametro due volte il raggio, la circonferenza sarà proporzionale al doppio del raggio e quindi

$$\frac{C}{D} = \pi$$

$$C = \pi \cdot D = \pi \cdot 2 \cdot r = 2r\pi$$

La formula per calcolare la circonferenza del cerchio generico è stata verificata.

L'area del cerchio

Occupiamoci dell'area. Nel teorema iniziale di *Misura del cerchio*, Archimede ci parla del modo con cui si può calcolare l'area di qualunque poligono; da ciò deduciamo che anche i nostri si adattano a questa legge

$$A_P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot Q = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \left(l \cdot n_{lati}\right)$$

dove a è l'apotema e Q è il perimetro (lato moltiplicato per il numero di lati) del poligono. Dato che abbiamo dimostrato che le nostre successioni di aree di poligoni, siano essi inscritti o circoscritti, tendono all'area del cerchio, possiamo calcolare quest'ultima lavorando analogamente con la formula del sopraccitato teorema.

Osserviamo le variabili dell'area del poligono generico. Per il numero dei lati tendente all'infinito il perimetro Q tende alla circonferenza C, mentre l'apotema a tende al raggio r e addirittura assume questo valore nel caso dei poligoni circoscritti. Effettuiamo il passaggio all'infinito

$$\lim_{n\to\infty} A_P = A_{cerchio} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \cdot a \cdot Q = A_{cerchio} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \lim_{n\to\infty} a \cdot \lim_{n\to\infty} Q = A_{cerchio} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot r \cdot C = A_{cerchio}$$

proprio come Archimede ci dice al termine della Proposizione 1:
«L'area di un qualunque cerchio è equivalente a quella di un triangolo rettangolo in cui un cateto sia lungo quanto il raggio del cerchio, mentre l'altro quanto la circonferenza».

Ribadiamo che Archimede non dice nulla sulla costruzione del triangolo, segno che anche lui considerava questa operazione impossibile da fare con strumenti geometrici. In effetti il triangolo ha sempre almeno un cateto di lunghezza irrazionale, in particolare quello pari alla circonferenza dipende direttamente da π.
Le dimostrazioni che Archimede adotta sono quindi un primo processo di astrazione da un problema geometrico ad uno analitico che prevede il passaggio al limite di una o più successioni. Come vedremo sarà proprio questo processo di astrazione che porterà alla scoperta dei teoremi basilari dell'analisi moderna.
Ancora una volta Archimede riesce ad anticipare i tempi, seppur basandosi su di un metodo inventato precedentemente.

PI GRECO (p)

È necessario fare un po' d'ordine: per calcolare l'area e la circonferenza del cerchio generico erano necessarie ancora due costanti diverse, anche se abbiamo visto che in tempi più recenti esse sono confluite in una sola: π.

È però importante però far notare che tutto ciò che la matematica moderna ha sviluppato riguardo a π è frutto di secoli e secoli di ricerche. In Archimede troviamo solo il valore di pi greco usato come costante, ma non sappiamo neppure se egli la chiamasse con questo nome. In tutti i calcoli che abbiamo affrontato e che affronteremo, abbiamo preferito inserire notazioni moderne come appunto π, in modo da rendere più comprensibile lo straordinario lavoro del siracusano.

Procediamo ora con la dimostrazione dell'effettivo rapporto esistente tra le due costanti antiche che ci porterà ad unificarle nel solo valore di π.

Ricapitoliamo, per dovere di chiarezza, le formule che Archimede ci fornisce. La prima, quella dell'area, ci appare strana a prima vista, ma possiamo renderla più familiare in questo modo.

$$A_{\text{cerchio}} = A_{\text{triangolo}}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot r \cdot C$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot r \cdot (2 \cdot r \cdot \pi)$$

$$A = \pi r^2$$

Negli *Elementi*, Euclide stabilisce e dimostra che il rapporto tra area di due cerchi generici e quadrato dei loro diametri è costante.

$$\frac{A}{D^2} = \kappa \text{, quindi } \frac{A_1}{A_2} = \frac{D_1^2}{D_2^2}$$

Verifichiamo se la formula di Archimede rispetta questo rapporto.

$$A_1 = r_1^2 \pi = \left(\frac{D_1}{2}\right)^2 \pi = \pi \frac{D_1^2}{4}$$

$$A_2 = r_2^2 \pi = \left(\frac{D_2}{2}\right)^2 \pi = \pi \frac{D_2^2}{4}$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\pi \frac{D_1^2}{4}}{\pi \frac{D_2^2}{4}} = \frac{D_1^2}{D_2^2}$$

Il teorema di Archimede comprende anche la proposizione di Euclide e non solo: passiamo al problema delle costanti κ e π, possiamo ora determinare finalmente che rapporto c'è tra l'una e l'altra.

Nell'espressione dell'area del cerchio, in Euclide si legge che $A = D^2 \cdot \kappa$. Se la compariamo con quella di Archimede otteniamo qualcosa di sorprendente.

$$\pi r^2 = D^2 \kappa$$

$$\pi r^2 = (2r)^2 \kappa$$

$$\pi = 4\kappa$$

ora sappiamo che κ, la costante bidimensionale euclidea, è un quarto del valore di π, la costante unidimensionale archimedea. Pertanto possiamo finalmente dimenticarci di κ e considerare come unica costante per l'area del cerchio e per la circonferenza π.

Finalmente si potevano calcolare l'area e la circonferenza del cerchio con un'unica costante che, a seconda della sua funzione, poteva considerarsi unidimensionale o bidimensionale. L'unica incognita restava ancora il suo valore. Già prima degli studi di Archimede, come del resto abbiamo visto, si usava la costante π, certo non aveva né il significato né il nome odierni. Fatto sta che nel *Papyrus Rhind* (1750-1600 a.C.) si afferma che il lato di un quadrato equivalente al cerchio si ottiene prendendo gli $^8/_9$ del diametro: si ottiene il valore $\pi = 3{,}16$; molto vicino al valore moderno, considerando l'antichità del calcolo. La più antica approssimazione di pi greco si trova addirittura nella *Bibbia*, dove si legge che «la circonferenza vale tre volte il diametro». Si ottiene quindi $\pi = 3$. Valore discutibile per uso scientifico, ma molto comodo per uso pratico.

Anche Archimede tentò di fornire il valore della costante, ma ben presto si accorse che non era un problema semplice: π era il primo numero trascendentale universalmente riconosciuto e cacciato. Per secoli e secoli si cercò di approssimare il suo valore, sperando in una provvidenziale periodicità dei suoi decimali, ma finora niente. Archimede aveva visto giusto: π è un numero infinito e trascendentale.

La "caccia al decimale" continua anche al giorno d'oggi; certo non si lavora più con regoli e frazioni, ma con computer velocissimi e algoritmi al limite dell'impossibile. Tutto questo ci ha fruttato un numero di cifre pari a qualche miliardo e ben presto saranno di più le cifre decimali conosciute di π che le stelle visibili nel cielo notturno. Forse questo giustifica l'appellativo di «numero trascendentale», che gli viene attribuito. Pensiamo solo a quali cambiamenti ha portato il valore di π nella trigonometria, esso ci permette di compiere calcoli che hanno dello straordinario con semplici formule e relazioni tra angoli e segmenti. Insomma pi greco è un numero dalle mille risorse ed è merito di Archimede se ora conosciamo il suo valore nel calcolo dell'area e della circonferenza del cerchio.

In *Misura del cerchio*, nella terza Proposizione, si legge:

> **Proposizione 3**. La circonferenza di ogni cerchio è tripla del suo diametro e lo supera ancora meno di $^1/_7$ del diametro e più di $^{10}/_{71}$.

Dunque, il rapporto fra circonferenza e relativo diametro è un numero compreso tra $3+\frac{1}{7}$ e $3+\frac{10}{71}$. Una descrizione che ci appare notevolmente precisa, se convertiamo in numeri decimali le frazioni indicate: $3{,}140845\ldots < \pi < 3{,}142857\ldots$. Troncando alla seconda cifra decimale otteniamo il ben noto 3,14, il valore che viene attribuito per scopi pratici a π. Notiamo che è strabiliante con quale precisione Archimede abbia operato all'approssimazione di π. Addirittura essa fu tale che per molto tempo questo intervallo venne considerato validissimo, solo più tardi si cominciò a cercare decimali ulteriori per aumentare la precisione dei calcoli effettuati. In copertina è possibile vedere le prime sei migliaia di decimali di π, calcolati mediante il software *Mathematica® 3.0*, sviluppato dalla Wolfram Research, il quale non fa altro che ripetere un procedimento inventato da un uomo quasi tremila anni fa: il metodo di esaustione. Archimede fu il primo ad utilizzarlo per determinare, o quantomeno approssimare, il valore di quell'ormai celeberrimo numero: π.

CAPITOLO 5

«METODO SUI TEOREMI MECCANICI»

Questo libro di Archimede contiene un innovativo procedimento di calcolo per determinare aree e volumi e quindi riuscire a quadrare e cubare qualsiasi figura geometrica, sia essa piana o solida. Il procedimento descritto verrà richiamato nel Seicento ed è fondamentalmente alla base di quello che noi oggi chiamiamo calcolo integrale. Come leggiamo nell'introduzione, lo stesso Archimede considerava questo metodo come uno straordinario strumento per la risoluzione dei problemi che gli si ponevano. È proprio con questo procedimento che egli riuscì a sbaragliare i vecchi sistemi di calcolo degli alessandrini e a raggiungere la fama di "padre della fisica-matematica", poiché il metodo altro non è che uno straordinario connubio tra meccanica e geometria, tra fisica e matematica, tra tecnica e astrazione.

STRUTTURA DEL TESTO

Dopo l'introduzione ci appare l'intero *Metodo* così come Archimede ce lo ha divulgato. Il libro è una raccolta di dimostrazioni eseguite per mezzo del metodo meccanico; Archimede stesso ammette che, non essendo questo un vero e proprio trattato, ma solo una lunga lettera ad Eratostene di Cirene, nelle dimostrazioni vere e proprie sono usati teoremi e uguaglianze che a prima vista non appaiono chiari. È probabile, inoltre, che Archimede non si sia preoccupato di dimostrare regole ormai accettate dalla maggior parte dei matematici, risparmiando così tempo e fatica.

Per la traduzione ci rifacciamo a E. Rufini, *Il "Metodo" di Archimede e le origini del calcolo infinitesiale nell'antichità*, ed. Feltrinelli (v. Bibliografia e fonti).

Il volume, diviso in Proposizioni, ci appare con la seguente struttura:

a. *Introduzione*

b. *Lemmi*

c. *Proposizioni:*

I	*Area di un segmento parabolico*
II	*Volume della sfera*
III	*Volume dell'ellissoide di rotazione*
IV	*Volume di un segmento di paraboloide di rotazione*
V	*Centro di gravità di un segmento di paraboloide di rotazione*
VI	*Centro di gravità di un emisfero*
VII	*Volume di un segmento sferico*
VIII	*Volume di un segmento d'ellissoide*
IX	*Centro di gravità di un segmento sferico*
X	*Centro di gravità di un segmento di ellissoide di rotazione*
XI	*Volume e centro di gravità di un segmento d'iperboloide*
XII	*Volume dell'unghia cilindrica. Determinazione meccanica*
XII	*Segmento cilindrico*
XIV	*Altra determinazione per il volume dell'unghia cilindrica*
XV	*Dimostrazione geometrica della proposizione XII*
XVI	*Volume del solido comune a due cilindri inscritti in un cubo. Deduzione meccanica*
XVII	*Dimostrazione geometrica della proposizione XVI*

Per il prosieguo del lavoro presenteremo e commenteremo l'«*Introduzione*», i «*Lemmi*» e la Proposizione «*II Volume della sfera*».

Introduzione. Archimede ad Eratostene, salute

Anzitutto, è necessario parlare di quello che è il vero e proprio *Metodo sui teoremi meccanici*, spiegandone l'origine ed il funzionamento. Perciò ci riferiremo ad un documento di indiscusso valore.

L'introduzione del *Metodo* ci informa sulle intenzioni del siracusano riguardo le idee contenute nel suo libro. Come abbiamo già accennato il *Metodo* non è un vero e proprio trattato, ma solo una lettera inviata da Archimede ad Eratostene di Cirene, suo stimato amico. Perciò, Archimede esprime chiaramente il suo scopo: divulgare il suo metodo sui teoremi meccanici, per evitare che vada perduto. Il carattere della lettera non è quindi volto a dimostrare rigorosamente la veridicità delle proposizioni in essa contenute, bensì la validità del sistema stesso con il quale queste proposizioni sono state sviluppate.

Purtroppo, trattandosi di uno scambio di idee tra matematici, Archimede non si preoccupa più di tanto di giustificare l'utilizzo di determinati teoremi e formule molto famose al suo tempo tra gli studiosi di geometria, perciò in alcuni punti il suo linguaggio ci appare alquanto oscuro.

In quest'introduzione, Archimede riconferma il suo "affetto" per quella dimostrazione che lo renderà famoso: il volume della sfera e il suo rapporto con il volume del cilindro. Ma il *Metodo* non è solo questo; anche se in molti trattati del sommo siracusano troviamo esaurienti dimostrazioni del sistema che egli ha usato, il *Metodo* costituisce un tassello fondamentale per la comprensione dell'intero suo operato, che facilita la comprensione di tutti i suoi altri testi.

Archimede a Eratostene salute.
Ti scrissi precedentemente circa alcuni teoremi da me trovati, e ti inviai i loro enunciati, invitandoti a trovarne le dimostrazioni, che io allora non potei indicare. Gli enunciati di quei teoremi erano i seguenti:
Del primo: Se in un prisma retto avente per base un parallelogrammo si inscrive un cilindro avente le basi sopra due parallelogrammi opposti e i lati sopra gli altri piani del prisma, e se per il centro del cerchio base del cilindro e per un lato del quadrato della faccia opposta si conduce un piano, questo piano staccherà dal cilindro un segmento limitato da due piani e dalla superficie del cilindro, cioè dal piano secante e dal piano in cui è situata la base del cilindro, e dalla superficie [cilindrica] compresa fra questi due piani; il segmento cilindrico così determinato è la sesta parte di tutto il prisma.
L'enunciato del secondo era: Se in un cubo s'inscrive un cilindro avente le basi sopra due parallelogrammi opposti e la superficie (laterale) tangente agli altri quattro piani (facce), e se nello stesso cubo s'inscrive poi un altro cilindro avente le basi su altri due parallelogrammi e la superficie tangente agli altri quattro piani, il solido compreso dalle superficie dei cilindri e comune ad ambedue i cilindri è uguale ai due terzi di tutto il cubo.
Merita di esser notato come questi teoremi differiscono da quelli scoperti precedentemente: infatti i solidi di cui allora trattavamo, cioè i conoidi e gli sferoidi e i loro segmenti, vennero confrontati, rispetto al volume, con coni e cilindri, e nessuno di essi fu trovato uguale a una figura solida limitata da piani; invece delle figure ora considerate, comprese da due piani e da superficie cilindriche, ciascuna si trova essere uguale a una figura solida limitata da piani.
Le dimostrazioni appunto di questi teoremi ho trascritto in questo libro, e a te le invio.
Ma siccome ti riconosco, come già ho fatto, studioso e maestro eccellente di filosofia, e sai apprezzare, quando è il caso, le ricerche matematiche, ho creduto bene esporti e dichiararti in questo stesso libro le particolarità di un metodo, mediante il quale ti sarà possibile acquistare una certa facilità di trattare cose matematiche per mezzo di considerazioni meccaniche. Sono persuaso, del resto, che questo metodo sarà non meno utile anche per la dimostrazione degli stessi teoremi. Infatti, anche a me alcune cose si manifestarono prima per via meccanica, e poi le dimostrai geometricamente; perché la ricerca fatta con questo metodo non importa una vera dimostrazione. Però è certamente più facile, dopo avere con tal metodo acquistato una certa cognizione delle questioni, trovarne la dimostrazione, anziché cercarla senza averne alcuna cognizione preliminare. Per questa ragione, anche di quei teoremi, riguardanti il cono e la piramide, di cui Eudosso trovò per primo la dimostrazione, cioè che il cono è la terza parte del cilindro e la piramide è la terza parte del prisma, aventi la stessa base e altezza uguale, un merito non piccolo dovrebbe attribuirsi a Democrito, che per primo enunciò questa proprietà delle dette figure senza dimostrazione.
Anche nel mio caso è accaduto che la scoperta dei teoremi, che ora pubblico è stata fatta in modo simile a quella dei teoremi predetti. In quest'occasione ho deciso di esporre per iscritto il metodo, sia perché l'avevo già preannunziato e non vorrei che si dicesse aver io fatto una promessa vana, sia perché sono persuaso che non poca utilità esso arrecherà alla matematica; penso infatti che alcuni dei presenti o dei futuri, mediante questo metodo, possano trovare anche altri teoremi, che a me non sono ancora venuti in mente.
Espongo in primo luogo quello che fu anche il primo risultato che mi si manifestò per via meccanica, cioè che "ogni segmento di una sezione di cono rettangolo è uguale ai quattro terzi del triangolo avente la stessa base e altezza uguale," e dopo questo ciascuno degli altri risultati ottenuti con questo metodo. Alla fine del libro esporrò le dimostrazioni geometriche di quei teoremi di cui ti ho già comunicato gli enunciati.

Lemmi

L'esposizione del vero e proprio *«Metodo meccanico»* è preceduta da undici *«lemmi»*: uno di natura algebrica e dieci di statica. Sono teoremi e proposizioni che permettono all'autore di stabilire una situazione iniziale, valida per le sue dimostrazioni e i suoi ragionamenti, senza doverla ripetere ogni volta. Si può ritenere che i lemmi erano accettati universalmente e che fosse possibile trovarli facilmente in qualche formulario di statica in uso all'epoca, che noi ovviamente non abbiamo. Questo formulario è forse una versione più ampia di *Sull'equilibrio dei piani*, unico trattato di statica dell'antichità, a noi pervenuto, nel quale si trovano già alcune di queste proposizioni (II, V e VI). V'è da ricordare che secondo Erone e altri commentatori arabi sarebbero esistite opere di statica che Archimede scrisse e che ormai sono andate perdute. Quest'accorgimento permette ad Archimede di alleggerire le dimostrazioni senza intaccarne la validità.

L'Introduzione è dunque seguita da questa serie di lemmi: li riportiamo qui di seguito senza soffermarci più di tanto, poichè non tutti sono strettamente legati con la dimostrazione che seguiremo più in là nel capitolo. È comunque un buon supporto informativo leggere tutti questi lemmi, anche perchè rendono bene l'idea sulle conoscenze del tempo in campo geometrico e matematico.

1. *Se da una grandezza si toglie un'altra grandezza, e se uno stesso punto è il centro di gravità della grandezza intera e di quella tolta, questo stesso punto è il centro di gravità anche della grandezza restante.*

2. *Se da una grandezza si toglie un'altra grandezza e se la grandezza intera e quella tolta non hanno lo stesso centro di gravità, il centro di gravità della grandezza restante si trova prolungando (oltre il centro della grandezza intera) la retta congiungente i centri di gravità della grandezza intera e di quella tolta e togliendo da questa un segmento che abbia con la congiungente i sopraddetti centri di gravità lo stesso rapporto che ha il peso della grandezza tolta con il peso della grandezza restante.*

3. *Se i centri di gravità di quante si vogliano grandezze sono sulla stessa retta, anche il centro di gravità della grandezza risultante dalla loro somma sarà sulla stessa retta.*

4. *Il centro di gravità di una retta [segmento di retta] è il suo punto di mezzo.*

5. *Il centro di gravità di un triangolo è il punto in cui si tagliano scambievolmente le rette condotte dai vertici del triangolo al punto di mezzo dei lati [opposti]*
   [È dimostrato in Sull'equilibrio, 1, 13, 14*]*

6. *Il centro di gravità di un parallelogrammo è il punto in cui si incontrano le diagonali.*

7. *Il centro di gravità di un circolo è lo stesso centro del circolo.*

8. *Il centro di gravità di un cilindro è il punto di mezzo dell'asse*[1].

9. *Il centro di gravità di un prisma è il punto di mezzo dell'asse*[1].

10. *Il centro di gravità di un cono è sull'asse, in un punto che lo divide in modo che la parte verso il vertice sia il triplo della rimanente*

11. *Mi servirò anche di questo teorema.*
    Date quante si vogliano grandezze e altre grandezze nello stesso numero, tali che quelle che occupano lo stesso posto, due a due, abbiano lo stesso rapporto, e se inoltre le prime grandezze, o tutte o alcune di esse, hanno quali si vogliano rapporti con altre grandezze, anche le seconde grandezze abbiano gli stessi rapporti con altre grandezze, allora la somma delle prime grandezze sta alla somma di quelle con cui furori messe in rapporto, come la somma delle seconde sta alla somma di quelle con cui furono messe in rapporto[2].

1 «Asse» è la retta congiungente i due centri di gravità delle basi del solido.
2 Questa proposizione è dimostrata in *Sui conoidi e sugli sferoidi, I*.

Il metodo sui teoremi meccanici

Il *«Metodo meccanico»* risulta dalla stretta combinazione di ragionamenti meccanici e ragionamenti infinitesimali e matematici. Archimede non attribuisce alla meccanica la validità di una dimostrazione matematica, egli ci dice solo che abbinando opportunamente le due scienze si ottengono risultati sorprendenti. Questo sistema di calcolo è utile per determinare sia i centri di gravità che per le quadrature e le cubature delle figure piane e solide. A grandi linee possiamo riassumere il metodo come segue.

Qualsiasi figura viene considerata come composta di elementi infinitesimi: segmenti nel caso di figure piane, superfici nel caso di solidi. Il triangolo e il segmento parabolico sono composti, rispettivamente, da linee e corde parallele, mentre il cilindro, la sfera e il cono sono composti da sezioni circolari parallele. Queste linee o superfici ci appaiono come figure, piane o solide, il cui spessore può essere trascurato. I solidi e le figure piane appaiono quindi come somme di queste sezioni infinitesimali.

Archimede, però, non spiega esattamente questo concetto; egli dice solamente che

> «ogni figura è composta o “riempita” da tutti i suoi elementi»

ciò equivale a dire che ogni figura è composta da un numero infinito di questi elementi, il cui spessore deve poter per forza essere trascurabile.

Precisato questo punto, prendiamo una figura X, regolare o irregolare, a piacere e determiniamone l’area. Nel caso di figure regolari, quadrilateri, triangoli o poligoni, il procedimento si riduce ad alcune semplici operazioni geometriche e aritmetiche. Ma se la figura da noi considerata fosse irregolare, non potremmo basarci direttamente su tali formule.

Perciò consideriamo la figura X e un’altra figura, che chiameremo B, scelta a piacere, della quale conosciamo l’area. Troviamo i centri di massa delle due figure, se possibile costruendoli o calcolandoli. (Il procedimento è una semplice media aritmetica dei punti che compongono le figure). Si tratta ora di trovare le relazioni che intercorrono tra le due aree. A tale scopo disponiamo le due figure su di una retta passante per i due centri di gravità, sulla quale disporremo i diametri, o gli assi, delle stesse. Mediante piani paralleli alla retta possiamo segare le due figure e trovare i loro componenti infinitesimali, che le “riempiono”. Osserveremo che, se una di tali sezioni è presente sia in X che in B, le due figure saranno equivalenti. Questo è oggi noto come «principio di Cavalieri», poiché è stato ripreso e rielaborato nel Seicento dal matematico italiano al quale faremo accenno in seguito.

Archimede procede con la dimostrazione dell’equivalenza delle aree, considerando le figure come composte di materia solida (pesante) e considerando le aree come masse. Egli dice che, fissato un punto P sulla retta che congiunge i centri di gravità, troveremo che la distanza delle due figure da esso è legata da una relazione di equilibrio al valore delle loro aree. In parole più semplici è come se considerassimo il tutto come una bilancia, dove X e B sono i piatti, la retta passate per i centri di gravità è il giogo e il punto P è il fulcro attorno al quale ruota il tutto.

In fisica si opera seguendo la legge d’equilibrio, la quale dice che una leva (la nostra bilancia è una leva di primo genere) è in equilibrio solo quando la somma dei momenti dei punti in cui si applicano delle forze è uguale a zero, in un adeguato sistema di riferimento.

Noi agiamo in maniera simile, poiché, come nel problema fisico, il momento delle figure relativo al punto P ci può dare il rapporto tra le due aree. Il momento equivale al valore che noi utilizziamo, forza o area, moltiplicato per la distanza dal fulcro del punto in cui la grandezza è applicata. Nel caso di una forza questo punto è noto come punto d’applicazione e può variare a piacere; nel caso di figure, il punto di applicazione è il centro di gravità. Archimede lo dimostra immaginando di prelevare tutti i componenti infinitesimali e di raggrupparli in modo tale da avere tutti loro i centri di gravità sovrapposti. Una volta trovati i momenti delle aree rispetto al fulcro P, una semplice equazione ci dice che valore ha l’area della figura X.

Per chiarire meglio la questione del *Metodo*, analizziamo il procedimento con cui Archimede trova il rapporto tra i volumi del cilindro e della sfera, della quale ne determina il valore. Invitiamo i lettori a seguire attentamente il procedimento poiché può apparire abbastanza complesso. Archimede, come del resto tutti i matematici dell’antichità, non lavorava in R, ma in Q.

Per quanto riguarda i risultati, noi preferiamo ridurli ad una o due formule generali in grado di fornirci i valori esatti conoscendo meno dati possibile. Per i matematici antichi, invece, queste formule non esistevano. Essi solevano esporre le loro scoperte e i loro risultati come rapporti tra grandezze omogenee. In nessun libro antico si troverà mai che l'area del cerchio è raggio al quadrato moltiplicato pi greco. Leggendo gli antichi trattati, come *Misura del cerchio* di Archimede, troveremo relazioni del tipo:

> «l'area del cerchio equivale a quella di un triangolo rettangolo avente un cateto di lunghezza pari al valore della circonferenza e l'altro cateto pari al raggio del cerchio».

Non è difficile immaginare quale maestrìa algebrica fosse necessaria per lavorare con questi rapporti, tanto più che i moderni procedimenti non erano ancora stati inventati, mentre il calcolo letterale era ancora agli inizi. La scrittura potrebbe apparire pesante e difficile da seguire, perciò questa, come le altre dimostrazioni archimedee, merita un'attenta lettura, perché se è vero che noi fatichiamo non poco a capirla, immaginiamoci il povero Archimede quanto sudore avrà versato scrivendo queste righe piene di sapienza. Non v'è da stupirsi che sulla sua tomba abbia voluto il bassorilievo del cilindro contenente una sfera e un cono. Ecco dunque il *Volume della sfera* tratto da *il Metodo sui teoremi meccanici, Archimede a Eratostene*.

II. Volume della Sfera

Le sfere, i coni e i cilindri vengono detti solidi di rotazione, poiché possono essere considerati come una rotazione di 360° di figure piane, quali, rispettivamente, il cerchio, il triangolo e il rettangolo.

Iniziamo ad analizzare il problema della costruzione di questi solidi e cerchiamo di trovare i collegamenti tra le varie figure.

Seguiamo il ragionamento di Archimede, nella traduzione di E. Rufini (v. bibliografia), permettendoci di inserire alcune note che facilitino la comprensione.

Proposizione 1.

Ogni sfera è quattro volte maggiore del cono che ha la base uguale a un circolo massimo della sfera e l'altezza uguale al raggio della sfera.

Proposizione 2.

Il cilindro, che ha la base uguale a un circolo massimo della sfera e l'altezza uguale al diametro della sfera, è una volta e mezzo più grande della sfera [cfr. Sulla sfera e sul cilindro, *I, 34].*

Dimostrazione. Facendo riferimento alla figura 5.1.

Sia data una sfera, e in essa il circolo massimo ABCD, e i diametri AC, BD tra loro perpendicolari; e sia, nella sfera, intorno al diametro BD, descritto il circolo perpendicolare al circolo ABCD; e su questo circolo perpendicolare si costruisca un cono con il vertice nel punto A; si prolunghi la superficie laterale di questo cono e si seghi con un piano per C parallelo alla sua base; la sezione sarà un circolo perpendicolare ad AC, di diametro EF. Su quest'ultimo circolo si descriva un cilindro con l'asse uguale ad AC; e siano EL, FG i lati del cilindro. Si prolunghi poi CA, e si faccia AH ad essa uguale, e si consideri CH come il giogo di una bilancia, di cui A sia il punto di mezzo.

Si conduca una retta MN parallela a BD, la quale seghi il circolo ABCD nei punti O, P, il diametro AC in S, la retta AE in Q, la retta AF in R. S'innalzi sulla stessa retta MN un piano perpendicolare ad AC; questo piano segherà il cilindro secondo un circolo di diametro MN, e la sfera ABCD secondo un circolo di diametro OP, e il cono secondo un circolo di diametro QR.

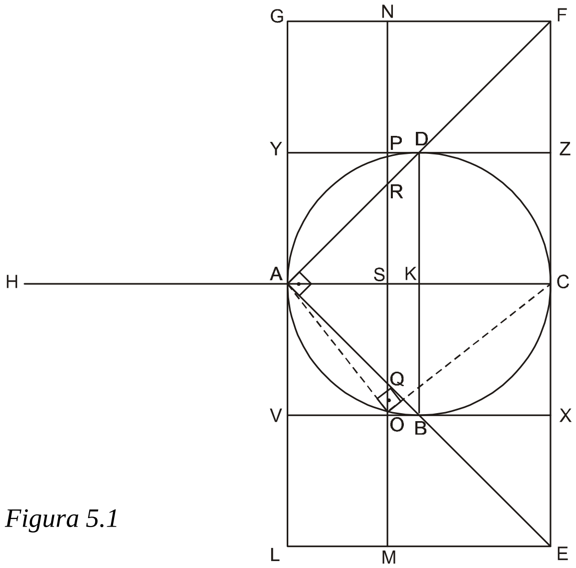


Figura 5.1

Vigono cioè le relazioni seguenti:

ABD e AEF sono triangoli rettangoli e isosceli, quindi simili. Perciò

$|AH| = |EC| = |AC| = |MS|$;

$|AS| = |SQ|$;

$|MS| \cdot |SQ| = |CE| \cdot |SQ|$;

$|EF| = 2|BD| \Leftrightarrow |CE| = 2|KB|$.

Il triangolo AOC è rettangolo in O perchè inscritto in una semicirconferenza di diametro [AC].
Per il teorema del cateto (v. allegato A1.1) di Euclide

$$|AC| \cdot |AS| = |AO|^2 ,$$

questo vale anche per tutte le misure equivalenti ad $|AC|$ e ad $|AS|$, quindi

$$|MS| \cdot |SQ| = |SQ| \cdot |MS| = |AO|^2 .$$

Applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo AOS, rettangolo in S, tenendo conto delle uguaglianze stabilite sopra

$$|AS|^2 + |OS|^2 = |AO|^2$$
$$|SQ|^2 + |OS|^2 = |AO|^2 .$$

Eguagliando i valori di AO, otteniamo che

$$|MS| \cdot |SQ| = |AC| \cdot |AS| = |AO|^2 = |SQ|^2 + |OS|^2 .$$

Sfruttiamo ora il rapporto $\dfrac{|AC|}{|AS|}$ e la relazione che abbiamo appena dimostrato.
Proseguendo per uguaglianze tra i termini troviamo che

$$\frac{|AC|}{|AS|} = \frac{|AH|}{|AS|} = \frac{|EC|}{|SQ|} = \frac{|MS| \cdot |MS|}{|SQ| \cdot |MS|} = \frac{|MS|^2}{|SQ|^2 + |OS|^2} .$$

Ma i valori elevati al quadrato sono tre raggi di altrettante circonferenze, ottenute dal piano parallelo alla retta MN, il quale "sega" i solidi di rotazione delle figure piane rappresentate nel disegno. Quindi

$$\frac{|MS|^2\pi}{|SQ|^2\pi+|OS|^2\pi}=\frac{C_{cilindro}}{C_{cono}+C_{sfera}}=\frac{|AH|}{|AS|}$$

dove

- $C_{cilindro}$ è l'area del cerchio ottenuto segando il cilindro generato dalla rotazione di EFGL con un piano parallelo alla retta MN e passante per S. Il raggio di questo cerchio è $|MS|$.
- C_{cono} è l'area del cerchio ottenuto segando il cono generato dalla rotazione di EFA con un piano parallelo alla retta MN e passante per S. Il raggio di questo cerchio è $|SQ|$.
- C_{sfera} è l'area del cerchio ottenuto segando la sfera generata dalla rotazione della semicirconferenza di diametro [AC], con un piano parallelo alla retta MN. Il raggio di questo cerchio è $|SO|$.

In Archimede leggiamo:

Il circolo che è nel cilindro, rimanendo al suo posto, farà equilibrio, rispetto al punto A, ad. ambedue i circoli che hanno per diametri OP, QR, trasportati e posti in H in modo che il centro di gravità di ciascuno di essi sia H.
Allo stesso modo si potrà dimostrare che, se si conduce nel parallelogrammo LF un'altra retta parallela ad EF, e da questa s'innalza un piano perpendicolare ad AC, il circolo che si ottiene nel cilindro, rimanendo al suo posto, farà equilibrio, rispetto al punto A, a tutti e due i circoli che si ottengono rispettivamente nella sfera e nel cono trasportati e posti sul giogo nel punto H, in modo che il centro di gravità dell'uno e dell'altro sia il punto H.
Così, dunque, riempiti con tali circoli il cilindro e la sfera e il cono, il cilindro, rimanendo al suo posto, farà equilibrio, rispetto al punto A, a tutti e due insieme la sfera e il cono, trasportati e posti sul giogo nel punto H, in modo che il centro di gravità dell'uno e dell'altra sia H.

Immaginiamo di poter tagliare effettivamente i solidi come abbiamo detto in precedenza. Archimede dice che, supponendo HC come il giogo di una bilancia con fulcro in A, se appendiamo C_{cono} e C_{sfera} sul punto H, essi verranno bilanciati dal cerchio $C_{cilindro}$ appeso sul punto S.

$$|AH|\cdot(C_{cono}+C_{sfera})=|AS|\cdot C_{cilindro}\ .$$

Questo è vero per qualunque posizione di MN, perciò è vero per qualsiasi "fetta" di solidi che essa produce. Se sommiamo queste infinite "fette" otteniamo il volume dei nostri solidi, perciò la relazione d'equilibrio può funzionare anche con essi. Bisogna però prestare attenzione ai punti per i quali vengono "appesi" questi solidi. Prima, con i cerchi, erano H e S: i centri. Ora dobbiamo considerare i centri di massa dei solidi: immaginiamo di spostare la sfera e il cono appendendoli per i loro centri di massa al punto H; per mantenere l'equilibrio dovremmo fare altrettanto con il cilindro, ma su quale punto? Dato che S è variabile, dipendente da MN, per i solidi non può essere il punto di applicazione. Ricordiamoci però che sia il cilindro che il cono sono concentrici alla sfera e che i loro centri di massa sono proprio il centro delle diagonali del rettangolo che genera il cilindro. Nel nostro caso esso è K, la relazione di equilibrio per i volumi diventa quindi:

$$|AH|\cdot(V_{cono}+V_{sfera})=|AK|\cdot V_{cilindro}$$

$$2\cdot|AK|\cdot(V_{cono}+V_{sfera})=|AK|\cdot V_{cilindro}\ .$$

$$2V_{sfera}+2V_{cono}=V_{cilindro}$$

Noi, come del resto Archimede, sappiamo che il volume di un cono è un terzo di quello del cilindro avente le stessa area di base e altezza.

$$2V_{sfera} + \frac{2}{3}V_{cilindro} = V_{cilindro}$$

$$2V_{sfera} = \frac{1}{3}V_{cilindro} \quad .$$

Il cilindro che noi consideriamo è quellogenerato dal rettangolo EFGL, avente come raggio di base EC, che è il doppio del raggio della sfera. Perciò

$$V_{sfera} = \frac{1}{6}\cdot\left(|EC|^2\cdot\pi\cdot|CA|\right)$$

$$V_{sfera} = \frac{1}{6}\cdot\left(4r^2\pi\cdot 2r\right)$$

$$V_{sfera} = \frac{8}{6}\cdot r^3\cdot\pi$$

$$V_{sfera} = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad .$$

Dopo aver individuato la moderna formula per calcolare il volume di una sfera di cui sia noto il raggio, Archimede continua con la determinazione dell'area totale della sfera.

> *Conosciuta questa proposizione, cioè che ogni sfera è quattro volte maggiore del cono che ha per base il circolo massimo e l'altezza uguale al raggio della sfera, mi venne in mente che la superficie di ogni sfera fosse quattro volte maggiore di quella di un circolo massimo della sfera; e precisamente, come ogni circolo è uguale ad un triangolo che ha per base la circonferenza del circolo e l'altezza uguale al raggio del circolo, così supposi che ogni sfera fosse uguale ad un cono avente per base la superficie della sfera e l'altezza uguale al raggio della sfera.*

Se r è il raggio della sfera, C l'area di un suo cerchio massimo, per la proposizione riportata si ha, indicando con V il volume della sfera

$$V = 4\cdot C\cdot\frac{r}{3}$$

Sappiamo che l'area di un cerchio equivale a quella di un triangolo avente come base la circonferenza e come altezza il raggio del cerchio stesso.

Noi però sappiamo che, chiamando con π la costante che lega area e raggio, $C = \pi r^2$ Sostituendo perciò otteniamo

$$V = 4\cdot\left(\pi\cdot r^2\right)\cdot\frac{r}{3}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

cioè la moderna formula per calcolare il volume di una sfera, di cui è noto il raggio.
Per la nostra ipotesi, però sappiamo anche che, chiamando S la superficie della sfera, otteniamo

$$V = S\frac{r}{3}$$

$$S\cdot\frac{r}{3} = 4\cdot C\cdot\frac{r}{3}$$

$$S = 4\cdot C$$

$$S = 4\pi r^2$$

che è la moderna formula per calcolare la superficie di una sfera di cui sia noto il raggio.

CAPITOLO 6

DAL METODO DI ESAUSTIONE AL CALCOLO INTEGRALE

L'EVOLUZIONE MEDIOEVALE

DALL'ANTICHITÀ AL CINQUECENTO

Nel periodo di tempo compreso tra la morte di Archimede, nel 212 a.C., e la caduta di Alessandria sotto Cesare, nel 48-47 a.C, il progresso occidentale che si era avuto sino ad allora iniziò una lunga fase di rallentamento sino alla sua completa capitolazione avvenuta nel simbolico 470 d.C., quando l'imperatore romano Romolo Augustolo venne deposto e orde di barbari, fra cui gli Ostrogoti, i Burgundi e gli Unni, capeggiati da Attila, calarono dall'Europa del Nord verso Roma, seminando panico e disordine in tutti i territori che toccavano. Per mare Vichinghi, Vandali e Saraceni depredavano le navi mercantili e saccheggiavano i porti. L'impero romano, ormai indebolito dalla divisione tra Oriente e Occidente e dalla crisi religiosa portata dal cristianesimo, cedeva sotto la pressione centrifuga delle popolazioni che aveva assoggettato. In Occidente stava per iniziare l'era più buia ed opprimente della storia, l'era che avrebbe portato la scienza e le conoscenze europee, sia umane che scientifiche, a meno di niente: il Medio Evo.

Tutto ciò è valido solo in Occidente. Costantinopoli e l'Impero romano d'Oriente continuarono a dominare l'Asia minore e il bacino mediorientale fino alla metà del XV secolo, quando gli Ottomani conquistarono la città sul Bosforo. In questo arco di tempo numerosi studiosi musulmani, certamente più illuminati dei contemporanei europei, continuarono lo studio e l'elaborazione dei testi antichi di filosofia, matematica, meccanica e astronomia. Grazie a loro grandi capolavori della prosa scientifica del passato, tra i quali molte opere di Archimede, si salvarono dalla distruzione. Mentre nei monasteri europei si conservavano gelosamente i manoscritti classici in polverosi e umidi scaffali, inaccessibili ai più, ad oriente si sviluppava un nuovo sistema numerico che sarebbe diventato la base universale della matematica: per la prima volta nella storia del vecchio continente si comprendeva il significato dello 0.

Nel corso del Trecento, fino al Cinquecento si moltiplicarono gli scambi mercantili con i mercati orientali, che offrivano oro, spezie e seta alle grandi egemonie commerciali che le sfruttavano, quali Venezia e Genova. Queste vie non erano solo un efficiente sistema di scambio mercantile, ma costituivano anche un importante punto d'incontro tra culture assai differenti, favorendo la diffusione della conoscenze orientali.

Nel Cinquecento iniziarono i movimenti di riforma protestante della chiesa in Germania, Francia e Svizzera, dapprima con Lutero e poi con Calvino e Zwingli. A causa delle sempre più frequenti critiche a suo carico, la chiesa cattolica convocò un concilio a Trento nel 1545 fissando una precisa politica controriformista basata su di una posizione radicale e conservativa nei confronti della tradizione ecclesiastica. Si istituirono il «Tribunale della Santa Inquisizione» e l'«Indice dei Libri proibiti» – quei volumi che promulgavano teorie senza senso o che nuocevano alla fede cristiana della chiesa cattolica del tempo, si predicavano rigide norme di comportamento ed interpretazioni letterali delle Sacre Scritture, i neo-aristotelici avevano il controllo delle autorità clericali e si costituì la Compagnia di Gesù, vero e proprio "braccio armato" della chiesa cattolica. L'uomo, come si suol dire, è "animale pensante" e quando egli usa l'intelletto è difficile nascondergli la verità. Le autorità ecclesiastiche medievali, vera fonte filosofica del tempo – si preoccuparono non poco alla notizia che si elaboravano teorie come l'eliocentrismo, l'atomismo o l'evoluzione animale, richiamate dagli scritti antichi e dagli scambi culturali con l'Oriente. L'innovazione scientifica iniziava a prendere piede. Molte scoperte geografiche, biologiche e naturalistiche iniziarono a far vacillare i fondamenti dell'opprimente filosofia cristiano-aristotelica; ad accelerare la diffusione delle idee era arrivata in Occidente, nel 1543, la stampa e, nel Seicento, ebbe l'inizio la vera e propria rivoluzione scientifica che portò le firme di personaggi del calibro di Leonardo da Vinci, Galileo Galilei, Sir Isaac Newton, Gottfried Wilhelm von Leibniz e poi, più tardi, Descartes, Gauss, Lagrange, Riemann, Cauchy e molti altri ancora.

Il Seicento

Milleseicento. In piena età Barocca, diciotto secoli dopo la morte del primo scienziato della storia, rinasceva quella scienza che sarebbe stata la base della società moderna. Ma come fu possibile che dopo un così lungo, ininterrotto periodo di silenzio, tante persone abbiano potuto raggiungere risultati tanto sorprendenti, quasi contemporaneamente? La risposta sta nella situazione globale.

All'inizio del medioevo pochissimi sapevano leggere e scrivere, per lo più erano monaci o preti o comunque ecclesiastici limitati fortemente dalle caratteristiche degli ordini a cui appartenevano. Attorno all'anno 1000 le crociate portarono in Europa tecnologie nuove e con esse nuove conoscenze. Nel 1492 Cristoforo Colombo strabiliò tutti scoprendo un nuovo continente, in seguito si aprirono nuove rotte commerciali e con esse la necessità di conoscere nuove terre, nuove culture, nuove lingue sia parlate che scritte. Piano, piano il numero di letterati aumentava sempre più, già nel Trecento Dante scriveva non solo ai prìncipi ed alla Chiesa, ma ai "lettori" in generale. Galileo e Leonardo iniziarono l'osservazione e lo studio di fenomeni fisici basandosi sulla sperimentazione e divulgando le loro scoperte al "grande pubblico", attraverso pubblicazioni di testi argomentativi. La crisi delle restrizioni ecclesiastiche portò alla soppressione dell'Indice e alla rivalutazione di capolavori dell'antichità, tra i quali opere di Archimede e di Euclide. Riscoprendo il passato si puntava al futuro: nacquero nuove scienze sperimentali e associazioni scientifiche, si perfezionò il calcolo e i procedimenti dei ragionamenti matematici, semplificandoli e alleggerendo le dimostrazioni, grazie alla moderna algebra.

La matematica, come un'araba fenice, risorgeva dalle proprie ceneri più forte e più solida che mai; pronta a fondare i concetti che non solo sono ancora validi, ma anche fondamentali per la nostra moderna società tecnologica.

Il metodo di esaustione

La nascita dell'analisi infinitesimale e quindi del calcolo integrale è legata, come abbiamo già avuto modo di vedere, alla geometria e all'antica meccanica. Non sorprende quindi, che anche la sua resurrezione sia legata alla fisica, l'evoluzione della meccanica.

Procediamo con ordine. Come abbiamo visto i greci utilizzavano un procedimento infinitesimale che anticipava il moderno calcolo integrale: il metodo di esaustione. Esso però, era una sorta di ripiego di cui ci si serviva per comprendere problemi concettuali, quale il limite, l'infinito, etc., sconosciuti agli antichi nei loro significati più profondi. Questo metodo era intuitivamente comodo e chiaro, ma, come del resto lo stesso Archimede ammette, può funzionare come metodo empirico, ma non come dimostrazione rigorosa. Tant'è che i greci ricorrevano, dopo i ragionamenti del metodo di esaustione, alle classiche dimostrazioni matematiche delle scoperte. Sistema che risultava alquanto complesso e contorto.

L'interpretazione seicentesca

Nella rinascita scientifica del Seicento, assieme alla matematica, crebbe anche il ragionamento logico e rigoroso che spingeva alla critica dei principi empirici e portava alla loro rigorosa dimostrazione. Questa sorte toccò anche al metodo di esaustione: grazie ai nuovi concetti di «limite» e di «serie», si riuscì a comprendere il funzionamento del metodo di Eudosso e ad interpretarlo in chiave rigorosamente logica.

Luca Valerio (Napoli, 1552 - Roma, 1618)

Luca Valerio nacque a Napoli nel 1552. Di lui sappiamo poco, ma fonti certe affermano che era matematico e membro dell'accademia dei Lincei, nonchè amico di Galileo Galilei. Nominato accademico nel 1612, fu espulso quattro anni dopo, per aver difeso Galilei nella controversia copernicana sulla struttura dell'Universo.

Valerio, come gli altri suoi contemporanei, attingeva dagli antichi nozioni, concetti e dimostrazioni sia matematiche che fisico-meccaniche. Il suo impegno scientifico, raccolto nell'opera *De centro Gravitatis Solidorum* del 1604, si proiettava nell'analisi infinitesimale moderna gettandone le basi. Per il calcolo dei baricentri e dei volumi sfruttò tecniche molto simili a quelle infinitesimali moderne, anche se mediate dagli antichi come Archimede, Euclide ed Eudosso. Valerio fornì anche una delle prime definizioni di «limite» in senso moderno. Si spense a Roma nel 1618.

Il “principio di esaustione”

Nel 1604, Valerio fu il primo a dare una dimostrazione rigorosa del metodo, nel suo *De centro Gravitatis Solidorum, Libri Tres*. Valerio iniziò il lavoro che avrebbe portato a considerare il metodo come una raccolta di condizioni che ne rendano possibile l’applicazione rigorosa. Egli lo trasformò in una sorta di principio matematico, applicandolo a curve e a superfici in generale e traendone conclusioni per ogni singolo caso. Ciò che egli scrisse potrebbe benissimo essere considerato come un moderno trattato di calcolo.

Valerio incomincia stabilendo un teorema per le curve che, in sostanza è la condizione di integrabilità di Riemann. L’enunciato, ovviamente in latino, è il seguente:

«Omni figurae circa diametrum in alteram partem deficienti, figura quaedam ex parallelogrammis in scribi potest, et altera circumscribi, ita ut circumscripta superet inscriptam minori spacio quantumque magnitudine proposita».

Che si traduce così.

Teorema
Data una curva piana degradante intorno ad un diametro da una parte di una sua corda – cioè tale che le corde parallele alla corda considerata decrescano allontanandosi da essa – si possono inscrivere e circoscrivere ad essa dei parallelogrammi in modo che la somma dei parallelogrammi circoscritti superi quella di quelli circoscritti, di un ε piccolo a piacere.

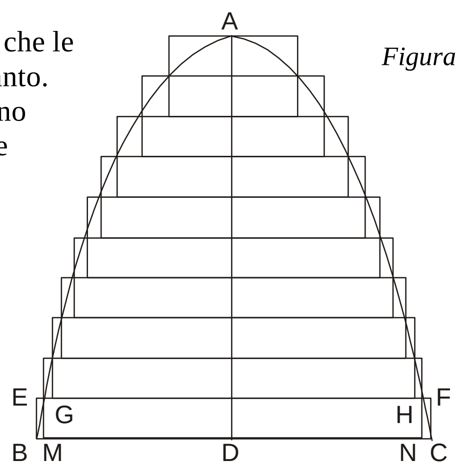


Figura 6.1

Dimostrazione. Sia AD un diametro della curva BAC, tale che le sue parallele intersechino la curva una e una sola volta soltanto. Dividiamo AD in *n* parti uguali e per i punti che ne risultano tracciamo le parallele a BC. Ognuna di queste parallele bisecherà la curva BAC, generando punti quali G e H. Costruiamo ora i parallelogrammi (rettangoli) inscritti e circoscritti aventi come vertici tali punti; si otterranno rettangoli come GHNM e BCFE, rispettivamente inscritto e circoscritto alla curva. La somma dei rettangoli circoscritti sarà ovviamente maggiore di quella dei rettangoli inscritti, ma tale differenza può diventare piccola a piacere, prendendo come *n* un numero abbastanza elevato.

Teorema
Il ragionamento si può estendere anche alla superficie della curva, basta considerare i parallelogrammi come cilindri che formano due «scaloidi», uno inscritto ed uno circoscritto, alla curva.

«Omni solido circa axim in alteram partem deficienti, cuius basis sit circulus vel ellypsis, figura quaedam ex cylindris, vel cilindri portionibus aequalium altitudinum in scribi potest, et altera circumscribi, ita ut circumscripta superet insccriptam minori excessu quacumque magnitudo proposita».

Dimostrazione. La dimostrazione è simile a quella delle curve, perché anche in questo caso la differenza tra il volume della figura circoscritta e quello di quella inscritta alla curva differiscono per un valore ε, piccolo a piacere, dipendente dal numero *n* di cilindri.

Veniamo ora al punto cruciale del trattato. Per poter trasformare il metodo di Esaustione in procedimenti moderni più rapidi da eseguire, è necessario precisare in maniera chiara il passaggio al limite che si prevede. Valerio utilizza una dimostrazione per assurdo preceduta da questa notevole proposizione:

«Si maior vel minor prima (*ablativo, N.d.A.*) ad unà (*avverbio = insieme, a un tempo, N.d.A.*) maiorem vel minorem seconda (ablativo), minore excessu vel defectu quantacunque magnitudine proposita nominatam habuerit proportionem; prima ad secundam tandem nominatam habuerit proportionem».

Che si può tradurre, inserendo già la nomenclatura a cui Valerio ricorrerà in seguito, nel modo seguente.

***Lemma**. «Se una grandezza E, maggiore o minore di una prima grandezza A, differendo da questa A per un eccesso o difetto inferiore a qualunque quantità assegnata, ha dato un rapporto $\frac{C}{D}$ rispetto ad una grandezza F, anch'essa maggiore o minore, [variando] insieme con E, di una seconda grandezza B, differendo da questa per eccesso o difetto per una quantità piccola a piacere; allora la prima grandezza A ha, rispetto B, lo stesso rapporto $\frac{C}{D}$ ».*

In forma più moderna. Se due grandezze E ed F variano insieme, restando costantemente uguale il loro rapporto ad un rapporto assegnato $\frac{C}{D}$, e tendono contemporaneamente a due limiti A e B in modo che $\lim_{x\to\infty} E = A$, e $\lim_{x\to\infty} F = B$, dove x è la variabile delle sue grandezze.

Allora si avrà

$$\frac{A}{B} = \frac{\lim E}{\lim F} = \frac{C}{D}$$

Grazie a questi lemmi, la dimostrazione che lo stesso Valerio dà di un problema archimedeo, il volume della sfera, appare rigorosa più di quello che potrebbe sembrare. In particolare è interessante osservare che l'ultimo lemma vale anche per situazioni in cui una grandezza sia calcolata, non con un'integrazione, ma con un procedimento in serie, su cui si basa il concetto moderno di integrale.

Il volume della sfera: la dimostrazione della scodella

Luca Valerio, ci ha dato una brillante dimostrazione del volume della sfera. Bonaventura Cavalieri la includerà undici anni dopo nel suo *Geometria invisibilibus*. Tuttavia essa è conosciuta come «*Dimostrazione della scodella*» di Galileo Galilei, il quale la riportò in *Discorsi e dimostrazioni matematiche*, del 1638.

Per sottolineare l'ottimo lavoro di Valerio è utile ricordare che egli ignorava dell'esistenza della dimostrazione per la soluzione del problema che Archimede aveva dato nel *Metodo*, poiché all'epoca tale libro non era conosciuto se non forse per qualche frammento. Per contro, conosceva molto probabilmente *Sulla sfera e sul cilindro* e le dimostrazioni che vi sono contenute.

Dimostrazione geometrica

Consideriamo il semicerchio AFB, di raggio r, il rettangolo ABCD, di lati 2r e r ad esso circoscritto, e il triangolo COD di base 2r e di altezza r. Seghiamo la figura con la retta a = HK, parallela ad AB alla distanza x =AH.

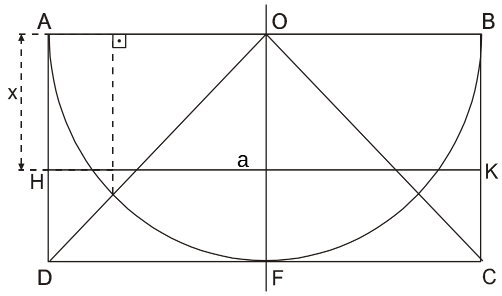


Figura 6.2

Immaginiamo di far ruotare il tutto attorno all'asse OF, il rettangolo genera il cilindro Y, il triangolo genera il cono V e il semicerchio la semisfera Z. La differenza tra Y e Z costituisce la "scodella" che dà il nome a questa dimostrazione, inoltre essa appare, per ipotesi, equivalente al cono V.

A sua volta, la retta a = HK, descrive un piano a perpendicolare all'asse OF.

Notiamo che a sega i solidi secondo tre circonferenze:

– la semisfera Z con un cerchio C_Z di raggio $\sqrt{r^2 - x^2}$ di raggio r e di area $\pi(r^2 - x^2)$;
– il cilindro Y con un cerchio C_Y di raggio r e di area πr^2;
– il cono V con un cerchio C_V di raggio x e di area πx^2.

Si nota che

$$C_Z = \pi \cdot \left(r^2 - x^2\right) = \pi r^2 - \pi x^2 = C_Y - C_V$$

Il nostro scopo è calcolare il volume della semisfera e possiamo farlo immaginando che essa sia composta da un'infinità di cerchi C_Z concentrici, con area diversa l'uno dall'altro, sovrapposti come per formare una pila di piatti, o meglio, di fogli.
Questi cerchi variano rispetto a x, perché r è, anche se relativa al caso specifico, una costante. Perciò concentriamo la nostra attenzione sulla variabile x; essa tende a divenire uguale al raggio r, con il cambiare della posizione rispetto alla sua normale del piano a; ciò accade per esempio quando la retta HK è uguale alla retta DC. Il minimo consentito per il variare di x è 0, perché gli estremi entro cui si muove il piano sono le facce circolari del cilindro, delimitate dalle rette AB e DC. Perciò considerando la variazione di x, o come ci si esprime in termini moderni, integrando da x = 0 a x = r, otteniamo

$$V_Z = \sum_{x=0}^{x=r} \pi \cdot \left(r^2 - x^2\right) = \pi r^2 + \ldots + \pi \cdot \left(r^2 - k^2\right) + \ldots + \pi \cdot \left(r^2 - r^2\right) = \int_0^r \left(C_Y - C_V\right) dx$$

grazie alla dimostrata proposizione di Valerio possiamo passare dalla successione al valore dei volumi

$$V_Z = \int_0^r \left(C_Y - C_V\right) dx$$

$$V_Z = \pi \cdot \left(\left(r^2 \cdot r\right) - \left(\frac{r^2 \cdot r}{3}\right)\right)$$

$$V_Z = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

$$2 \cdot V_Z = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \cdot 2$$

per la sfera quindi $$V_{SFERA} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Questo per quanto riguarda la dimostrazione geometrica. Luca Valerio ci fornisce però anche una dimostrazione aritmetica del suo operato, che ci sarà molto utile per capire l'evoluzione successiva del calcolo integrale.
Facciamo notare che i simboli moderni di integrale definito, somma e π non erano noti a Valerio. Li abbiamo inseriti per facilitare al lettore l'osservazione delle frequentissime analogie tra il lavoro dell'italiano e le conoscenze attuali.

Dimostrazione aritmetica

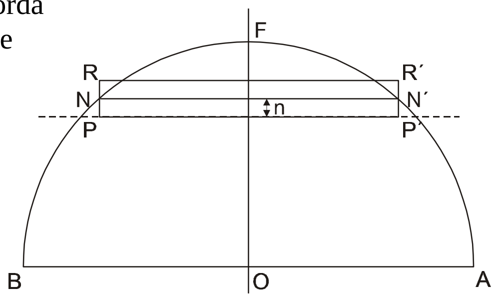
Per prima cosa bisogna trovare qual è il limite della successione seguente che già Archimede conosceva.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+...+k^2+...+n^2}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_0^n n^2=\frac{1}{3}.$$

Consideriamo un semicerchio BFA, di diametro BA, rotante attorno all'asse OF, come rappresentato nella figura 6.2.

Dividiamo il raggio OF in *n* parti uguali e consideriamo la corda NN´, parallela ad AB e passante per uno dei punti di divisione dell'asse. Chiamiamo questo punto i-esimo a partire da O, la sua distanza sarà quindi: $i\frac{r}{n}$.

Figura 6.2



Abbiamo così definito i rettangoli NN´PP´e NN´RR´, di base NN´e altezza $\frac{r}{n}$, rispettivamente inscritto e "circoscritto" alla semicirconferenza. Con il ruotare di essa attorno all'asse OF essi formeranno due cilindri concentrici, il primo inscritto e il secondo circoscritto alla semisfera V che viene generata. Immaginiamo di costruire altri cilindri come i primi due, otterremo due scaloidi: uno circoscritto e l'altro inscritto alla semisfera. Lavoriamo ora con il solito processo di approssimazione del volume della semisfera; sappiamo che esso sarà compreso tra quello dei due scaloidi e che la differenza tra il volume di questi ultimi può essere ridotta a piacere.

Calcoliamo il volume del cilindro NN´PP´.

$$\text{Volume}(NN'PP')=\pi\cdot\left(r^2-\left(i\frac{r}{n}\right)^2\right)\cdot\frac{r}{n}=\pi\frac{r^3}{n}-\pi\frac{r^3}{n^3}i^2$$

volume dello scaloide circoscritto

$$C=\sum_{i=1}^{n}\left(\pi\frac{r^3}{n}-\pi\frac{r^3}{n}i^2\right)=n\frac{\pi\cdot r^3}{n}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\pi r^3}{n^3}i^2=\pi r^3-\pi r^3\left(\frac{1}{n^3}\sum_{i=0}^{n}n^2\right)$$

volume dello scaloide inscritto

$$I=\sum_{i=1}^{n-1}\left(\pi\frac{r^3}{n}-\pi\frac{r^3}{n^3}i^2\right)=\pi r^3-\frac{1}{n}\pi r^3-\pi r^3\left(\frac{1}{n^3}\sum_{i=0}^{n}n^2\right)$$

Per proseguire ci serve il limite della successione $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_0^n n^2$, che abbiamo già trovato essere $\frac{1}{3}$.

Il volume della semisfera diventa quindi, per il passaggio al limite

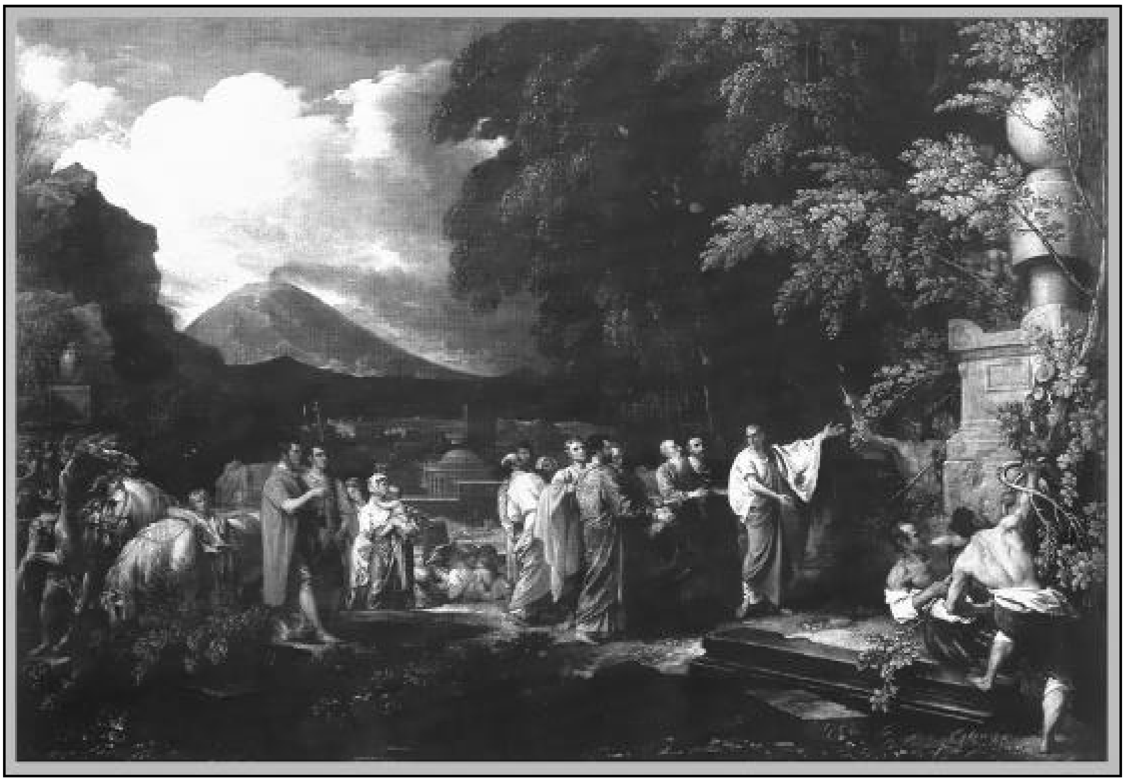
$$\frac{2}{3}\pi r^3.$$

Dato che il volume della sfera è due volte quello sella semisfera, otteniamo

$$S=\frac{4}{3}\pi r^3.$$

Abbiamo dimostrato in due modi diversi che il volume della sfera che Archimede aveva calcolato oltre un millennio prima corrisponde al vero. Notiamo però che entrambe le dimostrazioni si rifanno a quello che è il metodo di esaustione, rielaborato in chiave moderna da Luca Valerio.

«La morte di Archimede» in un'illustrazione dell'artista francese Edouard Vimont (1846-1930), tratta da un documento della Print and Picture Collection of the Free Library di Philadelphia.
Si notino il modello dell'universo tolemaico che il soldato tiene nella mano sinistra, la vite di Archimede nell'angolo alto a destra e la rappresentazione – dietro la sedia – del cilindro circoscritto alla sfera, oggetto della dimostrazione dei capitoli 5 e 6, che venne posto sulla scultura che sovrastava la tomba del siracusano.
Questa ricchezza di particolari precisi circa l'operato di Archimede testimonia quale sia la sua popolarità anche tra la gente comune di molti secoli dopo la sua morte.



«Cicerone scopre la tomba di Archimede», olio su tela 124,5 cm × 180,5 cm del pittore americano Benjamin West (1738-1820) dipinto nel 1797 e conservato in una collezione privata. West dipinse una seconda versione di questo soggetto, differente dalla prima nel 1804.
(Yale University Art Gallery collection, New Haven, Connecticut, USA)

Capitolo 7

Riflessioni finali

Dalla geometria all'analisi

Come abbiamo visto nel Seicento si aprì nuovamente il capitolo «calcolo infinitesimale» alla cui base si trova sempre quel metodo di esaustione che Eudosso di Cnido ideò più di un millennio prima, ma con una novità: Valerio ci parla di scaloidi di rotazione. Gli scaloidi sono composti da cilindri di altezza tendente a zero, che vengono inscritti e circoscritti al solido curvilineo del quale si vuole calcolare il volume. Questi "scaloidi" sono l'anello di congiunzione tra il metodo di esaustione e il moderno calcolo integrale.

Analizziamo la situazione. Col passare del tempo, i metodi infinitesimali sviluppati per problemi prettamente geometrici cambiarono radicalmente forma, ma non significato. Già alcuni studiosi italiani del XVII secolo, come Cavalieri e Galilei, iniziavano a considerare le soluzioni che abbiamo sinora dimostrate, non più come punto d'arrivo, ma come punto di partenza di nuovi e vieppiù complessi ragionamenti. Il nuovo metodo d'indagine scientifico, la sperimentazione e l'osservazione, entrava di prepotenza anche nel campo della matematica. Così, dai procedimenti infinitesimali del passato, si estrapolavano principi che avrebbero posto le condizioni fondamentali per la prosecuzione del lavoro di analisi infinitesimale.

Il principio fondamentale di tutti i procedimenti che abbiamo utilizzato, metodo d'esaustione in testa, è l'esistenza di quelle particelle fondamentali e infinitesime, che nel corso della storia hanno assunto nomi diversi: «elementi di una figura», «indivisibili», «infinitesimi», «atomi», etc.

Esse sono, idealmente, ciò che costituisce l'universo, sono materia, spazio e tempo. Sono quelle particelle che l'analisi infinitesimale pretende di poter "contare" attraverso i passaggi al limite; in ogni dove ve ne sono infinite; esse c'erano, ci sono e ci saranno, anche se non le vediamo. È questo il concetto basilare che congiunge i problemi geometrici di Archimede alla nascente matematica analitica delle funzioni: il processo di astrazione dalla realtà fisica e tangibile ad una ideale e metafisica. Matematicamente ciò equivale alla scoperta di un nuovo universo numerico e concettuale, in grado di concepire questi indivisibili per ciò che sono: è il passaggio dall'insieme Q dei numeri razionali a quello R dei numeri reali, e poi a C. Ma per comprendere particelle impossibili da vedere è necessario costruire modelli che superino quelli geometrici utilizzati per se stessi, come fece Archimede. Uno di essi è il ben noto concetto di «limite». Quando si dice che gli elementi di una successione o di una serie si avvicinano quanto si vuole, cioè tendono, ad un numero, questo numero è chiamato il limite della serie o della successione di valori considerata. L'esistenza di un valore ε, piccolo a piacere, che costituisce la differenza tra un qualsiasi valore della successione e il limite, implica anche l'esistenza di un numero infinito di termini vicino al limite stesso. Ciò equivale a dire che tra il limite e un qualsiasi altro numero vi sono infiniti elementi; ma dato che anche il limite può assumere qualsiasi valore in R, possiamo affermare che una caratteristica di questo insieme numerico, è la presenza tra un numero e l'altro di un infinità di termini, cosa che non è vera in N, in Z o in Q, anche se quest'ultimo è denso. È appunto questa proprietà che ha portato i matematici a considerare l'insieme dei numeri reali ideale per le analisi infinitesimali.

Risolto il problema concettuale rimaneva quello tecnico. I nostri problemi erano tutti di natura esclusivamente geometrica, ma per risolvere problemi più complessi era necessario riuscire a convertire la geometria e le figure geometriche in punti o in insiemi di punti. Per questo scopo si svilupparono due nuove tecniche matematiche: la geometria analitica, anche se figlia della geometria greca, e l'analisi infinitesimale vera e propria.

La prima è una fusione delle tecniche già note di algebra e geometria ed è nata da un'intuizione di Descartes nel XVII secolo. La geometria analitica, anche se molto utile in fisica e molto comoda, specie se affiancata alla trigonometria, non rappresenta un grandissimo passo in avanti verso l'analisi moderna. Piuttosto essa è un complemento a quest'ultima, che, come vedremo in seguito, fornisce il collegamento tra analisi e problemi geometrici come aree e volumi.

La seconda tecnica è quella che più ci serve per concludere il nostro viaggio. Dobbiamo lasciarci alle spalle, per un momento, la fisica-matematica di Archimede e lo stesso *Metodo sui teoremi meccanici*, per lasciare il posto a qualcosa di nuovo e di più potente: le funzioni.

Una funzione è un metodo con il quale è possibile mettere in relazione, l'una con l'altra, due grandezze.

Data la prima (ascissa) è possibile trovare l'altra (ordinata) seguendo un procedimento aritmetico. Questo calcolo è la funzione vera e propria e una sua proprietà, nonché indiscutibile vantaggio, è la possibilità di essere rappresentata su di un grafico (sistema di assi cartesiani ortonormato xy), permettendo così di essere riconosciuta a prima vista, senza bisogno di calcoli o ragionamenti troppo complicati. È questo il legame con la geometria, analitica o non, cosa sono i grafici se non un "disegno fatto di numeri"? E questi numeri, appartenenti all'insieme R dei numeri reali, potevano essere calcolati ed elaborati con molta più facilità rispetto ai procedimenti del passato.

Riprendiamo ora la matematica applicata. Le funzioni erano nate di pari passo con l'interesse crescente per la fisica quantitativa e lo studio della natura. Ben presto si riuscirono a stabilire i concetti fondamentali e le operazioni principali; poi si passò a concetti più difficili, quali rette tangenti, intersezioni, derivate ed integrali. Tutto ciò che ha a che fare con le funzioni e le loro operazioni si chiama analisi ed è un'importante, e relativamente moderna, branca della matematica, nata nell'Ottocento e che fornirà gli strumenti alle straordinarie e rivoluzionarie scoperte dell'Ottocento e del Novecento; prime fra tutte la geometria frattale e le due teorie della relatività di Albert Einstein.

L'Ottocento

È nel corso dei secoli XVIII e XIX che dobbiamo ricercare il completamento del concetto di analisi infinitesimale con Newton, Leibniz e Riemann. In questo periodo si ultimarono e si universalizzarono le notazioni, i teoremi e le relazioni tra i vari procedimenti. La fine del processo costruttivo si ebbe con il teorema di Barrow, che sancisce che «l'integrale è la funzione inversa della derivata», il "teorema fondamentale del calcolo infinitesimale". Il processo di sistemazione dei concetti non fu semplice: la disputa, che coinvolse in particolare le università tedesche, francesi e inglesi, durò un secolo e molti dei suoi partecipanti non videro la sua fine.

L'integrale, secondo una grossolana quanto efficace definizione, è l'area compresa tra il grafico di una funzione e, per convenzione di disegno, l'asse x delle ascisse. Quest'area mette in relazione la variazione delle ascisse con quella delle ordinate ed è molto utile in fisica. Ad esempio, disponendo sull'asse y il valore di una forza applicata ad un corpo, e sull'asse x lo spostamento di tale corpo; l'area sotto il grafico stabilisce quanto lavoro è stato compiuto dalla forza applicata. Finché si lavora con funzioni che danno grafici semplici, come le rette, non vi sono problemi, poiché l'area corrisponde a quella di una figura relativamente semplice e comunque nota (un triangolo, un rettangolo, un trapezio, etc.). I problemi sorgono quando si ottengono grafici di funzioni sinusoidali, paraboliche, iperboliche, o altre, peraltro molto frequenti. Come procedere? Per risolvere la questione costruiamo delle serie di rettangoli, o trapezi, inscritti e circoscritti alla curva in modo che ne approssimino l'area. Quanto più la larghezza Δx dei rettangoli, o dei trapezi, si avvicina a zero, tanto più l'errore di approssimazione diminuisce.

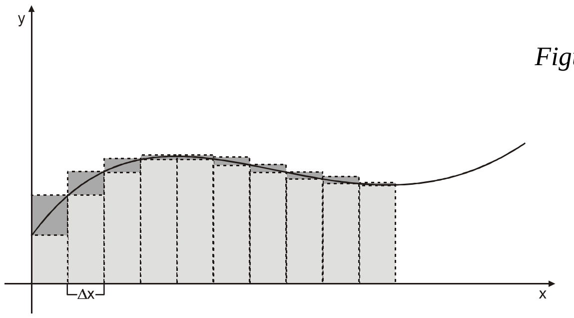


Figura 7.1

Quindi, l'area sotto il grafico della curva sarà il limite della serie delle aree dei rettangoli inscritti o circoscritti ad essa.

Ma questo altro non è che il vecchio metodo di esaustione che, grazie ad Archimede, è giunto fino al tempo in cui qualcuno è riuscito a sfruttarlo per quello straordinario procedimento infinitesimale che è. Grazie ad una scoperta di quasi tremila anni, due secoli fa è stato possibile giungere a conclusioni che hanno portato la conoscenza umana a livelli mai raggiunti nella storia, finalmente ad un passo dalla comprensione di quella natura che fin dai tempi degli antichi greci è stata fonte di ispirazione, ma anche di soggezione e timori per tutti gli uomini.

ALLEGATI

NOTA INTRODUTTIVA AI LETTORI

I testi ed i procedimenti che costituiscono questi Allegati sono stati inseriti per facilitare ai lettori la comprensione dell'intero fascicolo. Riteniamo comunque indispensabile, onde massimizzare la comprensione del lavoro, che i lettori approfondiscano ulteriormente i concetti che non sono a loro chiari.

Ricordiamo inoltre, come abbiamo già detto nella prefazione, che per poter seguire i ragionamenti contenuti nel testo, si richiedono discrete conoscenze nel campo dell'analisi. In particolare, i concetti basilari di «limite», «successione numerica» e «serie» sono consigliati per poter capire appieno il significato del lavoro. L'uso di concetti che necessitano di maggiori conoscenze, come «integrali» e «trigonometria piana», è stato ridotto al minimo indispensabile, sostituendoli con procedimenti più semplici dal profilo logico, ma che possono apparire più complessi nel loro sviluppo algebrico.

Gli Allegati riportati di seguito, non vogliono essere oggetto di studio e di riflessione, ma solo un supporto che può apparire utile per meglio comprendere questo lavoro di ricerca.

ALLEGATO 1

I TEOREMI DI EUCLIDE SUL TRIANGOLO RETTANGOLO

A1.1 IL TEOREMA DEL CATETO

«In un triangolo rettangolo, il quadrato costruito su di un cateto è equiesteso [ha la medesima area] al rettangolo che ha per dimensioni l'ipotenusa e la proiezione del cateto sull'ipotenusa».

Riferendoci alla figura A1.1, abbiamo le seguenti condizioni:

ABC, ACH e HCB sono simili;

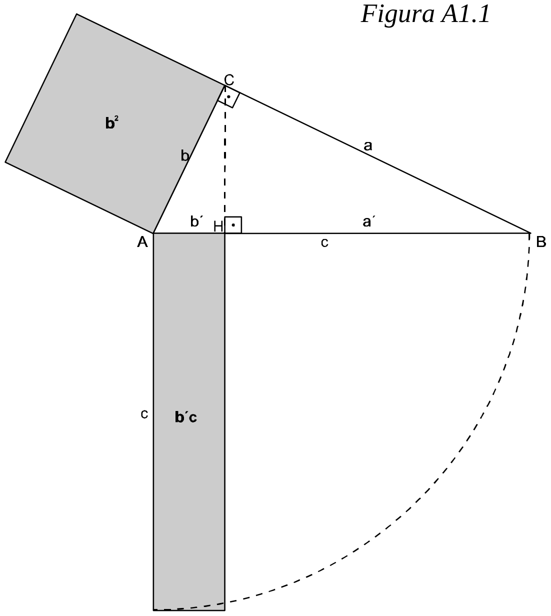
poniamo le seguenti notazioni:

$[CB] = a$
$[AC] = b$
$[AB] = c$
$[AH] = b'$

Matematicamente, il teorema si esprime nel modo seguente:

$$\boxed{b^2 = b' \cdot c}$$

Figura A1.1



A1.2 Il teorema dell'altezza

«In un triangolo rettangolo, il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equiesteso [ha la medesima area] al rettangolo che ha per dimensioni le proiezioni dei due cateti sull'ipotenusa».

Riferendoci alla figura A1.2, abbiamo le seguenti condizioni:

ABC, ACH e HCB sono simili;

poniamo le seguenti notazioni:

$|CB| = a$

$|AC| = b$

$|CH| = h$

$|AH| = b'$

$|HB| = a'$

Matematicamente, il teorema si esprime nel modo seguente:

$$\boxed{h^2 = a' \cdot b'}$$

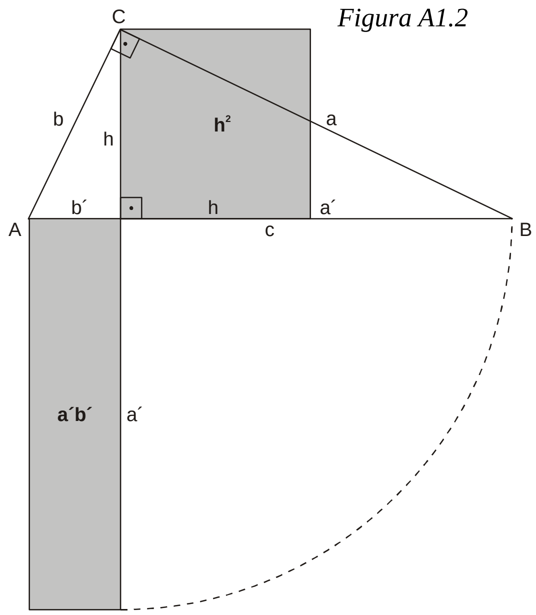


Figura A1.2

Allegato 2

Schema per le quadrature generiche

A2.1 Quadratura del rettangolo

Costruzione.
Riferiamoci alla figura A2.1. Per quadrare il rettagolo OFJH, prolunghiamo il segmento [FJ] a piacere e riportiamo su di esso la misura del segmento $|JH|$, fissando il punto P. Troviamo il punto medio del segmento [FP], che chiameremo G, e disegnamo la semicirconferenza di raggio [GP]. Prolunghiamo il segmento [JH] fino a quando interscherà la semicirconferenza nel punto N. $|JN|$ è il lato del quadrato dia rea uguale al rettangolo.

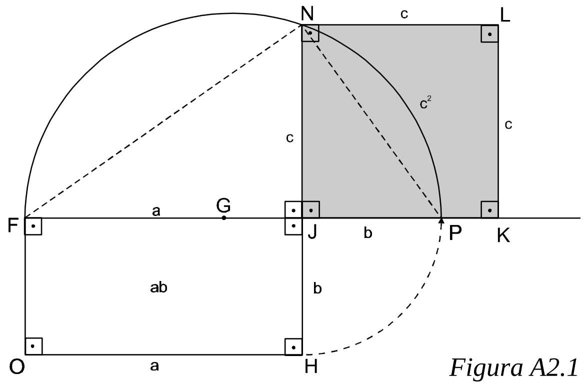


Figura A2.1

Dimostrazione. La quadratura del rettangolo è un'applicazione del teorema dell'altezza di Euclide che abbiamo riportato nell'allegato A1.2. Il tiangolo interessato e FPN, rettangolo in N, perchè inscritto nella semicirconferenza con centro in G. Se l'altezza del triangolo è c, e le due proiezioni sono a e b, avremo

$$c^2 = a \cdot b \iff \text{area}(JKLN) = \text{area}(OFJH)$$

A2.2 Quadratura del triangolo

Costruzione.
Riferiamoci alla figura A2.2. Per quadrare il triangolo ABC, dobbiamo costruire il rettangolo eqiesteso BDEO, che verrà quadrato come riportato nell'allegato A2.1.
Troviamo il punto medio F del segmento [CH], che è un'altezza del triangolo ABC. Per questioni grafiche, riportiamo la misura del segmento $|AB|$, sul suo prolungamento, trovando il punto D; [BD] sarà una dimensione del rettangolo da costruire. Tracciamo la perpendicolare a [BD]; la sua intersezione con la retta passante da F e perpendicolare all'altezza [CH], formerà il punto O. [BO] è la seconda dimensione del rettangolo BDEO, equesteso al triangolo ABC.

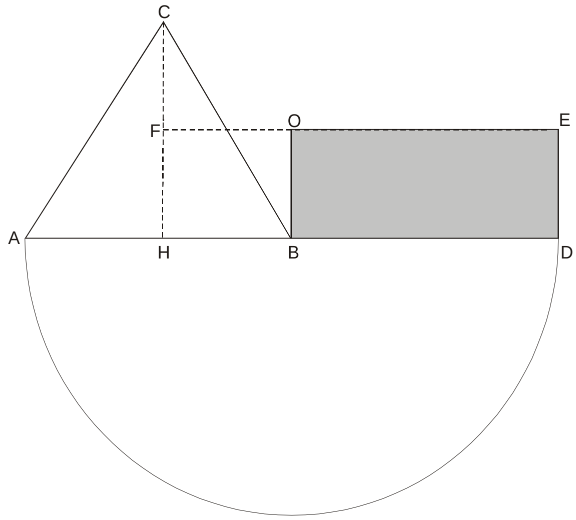


Figura A2.2

Dimostrazione.
È sufficiente ragionare sulle formule dell'area del triangolo e dell'area del rettangolo.

$$\text{area}(\text{BDEO}) = |\text{BD}| \cdot |\text{BO}|$$

$$\text{dato che } |\text{BD}| = |\text{AB}| \text{ e } |\text{BO}| = \frac{1}{2}|\text{CH}|$$

$$\text{area}(\text{BDEO}) = |\text{AB}| \cdot \frac{1}{2} \cdot |\text{CH}| = \text{area}(\text{ABC})$$

A2.3 Quadratura del poligono generico

Costruzione.
Per quadrare un poligono generico, bisogna prima scomporlo in triangoli, poi bisogna costruire i rettangoli equiestesi ad essi, come descritto nel procedimento A2.2. Infine si quadrano i rettangoli così ottenuti, come descritto nel procedimento A2.1.
Per ottenere l'area complessiva del poligono in un solo quadrato, è necessario sommare le aree dei quadrati ottenuti dal procedimento.
A questo scopo si usa il teorema di Pitagora, come illustreremo nel punto seguente.

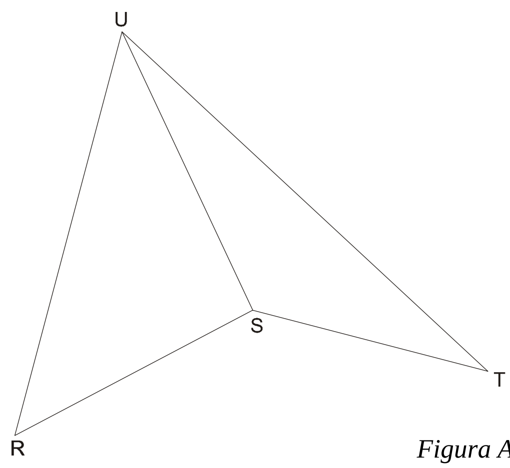


Figura A2.3

A2.4 Somma di due quadrati

Costruzione.

Il teorema di Pitagora dice che la somma delle aree dei due quadrati costruiti sui cateti di un triangolo rettangolo, è uguale all'area del quadrato costruito sull'ipotenusa. Dato che noi disponiamo di due quadrati che vogliamo sommare, possimo costruite il triangolo rettangolo avente per cateti i lati dei due quadrati, come mostrato nella figura A2.4.

Questo procedimento può essere ripetuto per tutti i quadrati costruiti dalla scomposizione del poligono in triangoli avvenuta nel punto A2.3. Sommando tutti i quadrati, alla fine se ne otterrà uno di area uguale al poligono, pertanto si può dire di aver quadrato quet'ultimo.

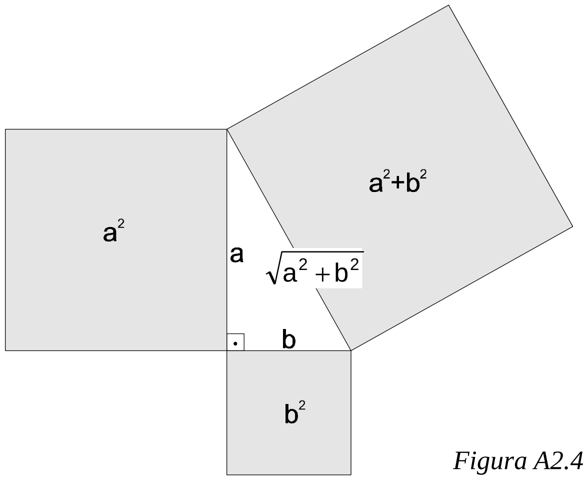


Figura A2.4

Bibliografia e fonti

Fonti bibliografiche (in ordine alfabetico)

Association pour le développement de la culture scientifique (ADCS); *Le nombre p* ; BP222, 80002 Amiens, Cedex 1, France.

Enrico Rufini; *Il "Metodo" di Archimede e le origini del calcolo infinitesimale nell'antichità*; edizioni Biblioteca scientifica Feltrinelli 4, Milano 1961.

Federigo Enriques; *Questioni riguardanti le matematiche elementari, raccolte e coordinate da Federigo Enriques, parte prima: critica dei principi, terza edizione*; edizioni CM3 Zanichelli, 1924-1927; *Articolo Ottavo*, di Oscar Chisini, Cagliari.

Nicola Abbagnano, Giovanni Fornero; *Protagonisti e testi della filosofia vol. A*, edizioni Paravia, Torino; *Capitolo sedicesimo:* apogeo delle scienze nell'età ellenistica e il loro declino nell'età imperiale.

Rossana Tazzioli; *Riemann: alla ricerca della geometria della natura*; *I grandi della scienza*, abbinato a *Le scienze* (versione italiana di *Scientific American*), anno III, numero 4, Milano, aprile 2000.

William Dunham; *Viaggio attraverso il genio*; edizioni Zanichelli, Bologna 1992;
Capitolo 1: Archimede e la determinazione dell'area del cerchio;
Capitolo 4: la lunula di Ippocrate.

Fonti multimediali

Enciclopedia Microsoft Encarta® 99.

DeAgostini Omnia® 99, enciclopedia multimediale.

Rizzoli - Larousse 2000, enciclopedia multimediale.

Fonti telematiche

Enciclopedia Britannica online
http://www.britannica.com

Drexel Univesity
http://www.mcs.drexel.edu/~crorres/Archimedes/contents.html

Hystory of mathematicians
http://history.math.csusb.edu/index.html

Fonti e autori delle illustrazioni

Pagina	Illustrazione	Autore e fonte
3	Particolare di Archimede con uno specchio ustorio	Archivio Drexel University, USA
5	Il busto di Archimede	IMSS, Firenze, Italia
6	La battaglia tra Siracusani e Romani	Stampa, archivio Drexel University, USA
12	La morte di Archimede	Gustave Curtois, Print and Picture Collection of the Free Library of Philadelphia, USA
12	Francobollo raffigurante Archimede	Poste Italiane, maggio 1983
18	Figura 4.1: la lunula di Ippocrate	W. Dunham, *Viaggio attraverso il genio*, ed. Zanichelli 1992
19	Figura 4.2: la quadratura del triangolo	W. Dunham, *Viaggio attraverso il genio*, ed. Zanichelli 1992
20	Figura 4.3: la quadratura del rettangolo	W. Dunham, *Viaggio attraverso il genio*, ed. Zanichelli 1992
25	Figura 4.4: poligoni inscritti ad una circonferenza	I. Bonesana, ricostruzione dal testo
27	Figura 4.5: poligoni circoscritti ad una circonferenza	I. Bonesana, ricostruzione dal testo
38	Figura 5.1: il volume della sfera	I. Bonesana, da E. Rufini, *Il “Metodo” di Archimede e l’analisi infinitesimale nell’antichità*
43	Figura 6.1: l’area della parabola	I. Bonesana, da F. Enriques, *Questioni sulle matematiche elementari*
44	Figura 6.2: la dimostrazione della scodella	I. Bonesana, da F. Enriques, *Questioni sulle matematiche elementari*
46	Figura 6.3: la dimostrazione aritmetica di Valerio	I. Bonesana, da F. Enriques, *Questioni sulle matematiche elementari*
47	La morte di Archimede	Edouard Vimont, Print and Picture Collection of the Free Library of Philadelphia, USA.
48	Cicerone scopre la tomba di Archimede	Benjamin West, Yale University Art Gallery Collection, New Haven, USA.
50	Figura 7.1: il moderno concetto di integrale	I. Bonesana, ricostruzione dal testo
51	Figura A1.1: il teorema del cateto di Euclide	I. Bonesana, ricostruzione dal testo
52	Figura A1.2: il teorema dell’altezza di Euclide	I. Bonesana, ricostruzione dal testo
52	Figura A2.1: la quadratura del rettangolo	I. Bonesana, ricostruzione dal testo
53	Figura A2.2: la quadratura del tirangolo	I. Bonesana, ricostruzione dal testo
53	Figura A2.3: la quadratura del poligono generico	I. Bonesana, ricostruzione dal testo
54	Figura A2.4: la somma dei quadrati	I. Bonesana, ricostruzione dal testo

INDICE